

Doppelter Münzwurf mit dem Fuchs und den Raben

Arne Pöhls

Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte?
In einer Fabel werden sich zwei Raben nicht einig. Der Fuchs schlägt das Werfen zweier Münzen vor, um den Streit zu lösen. Durch eigene Experimente erkennen die Kinder in der Unterrichtssequenz, dass der vermeintlich faire Vorschlag alles andere als vorteilhaft für die beiden Vögel ist.


Die Münze ist ein einfacher Zufallsgenerator. Wichtig ist die Münze als Zufallsgenerator nicht nur, weil sie unter anderem in Sport und Freizeit häufig zum Einsatz kommt und somit eine genauere Betrachtung des Münzwurfs ein wichtiger Beitrag zur Umwelterschließung ist. Wichtig ist der Münzwurf auch, weil man mit ihm – weit über die Grundschule hinaus – alle gleichverteilten Zufallsphänomene, die zwei Ergebnisse haben, simulieren kann. Beispielsweise können das Werfen einer geraden Zahl mit einem Würfel oder die Geschlechterverteilung stochastisch mit einer Münze modelliert werden.

Wirft man zwei Münzen gleichzeitig, so besteht für jede Münze die gleiche Wahrscheinlichkeit, Zahl oder Wappen zu zeigen. Der Fuchs in der Fabel (s. **KASTEN**) gibt als mögliche Ausgänge des Werfens zweier Münzen folgende Ereignisse an: „Beide Münzen zeigen Zahl“, „Beide Münzen zeigen Wappen“ und „Die Münzen zeigen verschiedene Seiten.“ Die Annahme, dass diese Ereignisse gleichverteilt sind, ist ein Trugschluss. Tatsächlich kann sowohl die erste Münze Wappen (W) und die zweite Zahl (Z) zeigen als auch umgekehrt die erste Münze Zahl und die zweite Münze Wappen. Es ergeben sich somit folgende gleichwahrscheinliche Ergebnisse: (Z, Z), (W, W), (Z, W), (W, Z). Da der Fuchs sich für seinen Sieg zwei der vier Ergebnisse reserviert hat, ist seine Gewinnchance bei dem Spiel doppelt so hoch wie die jedes Raben.

Die große Hürde und zu überwindende Schwierigkeit bei diesem Experiment und allgemein beim Wer-

fen zweier Münzen ist, dass es bei gleich aussehenden Münzen kaum möglich ist, beide Zufallsgeneratoren zu unterscheiden. Der schlaue Fuchs setzt darauf, dass die Raben eben diese Hürde nicht überwinden. Und Ihre Schülerinnen und Schüler?

► Was sollten die Kinder können?

Es ist wünschenswert, aber nicht notwendig, dass die Kinder vor dieser Unterrichtssequenz Erfahrungen mit dem Werfen einzelner Münzen oder Wendeplättchen gemacht und so die Münze als Zufallsgenerator kennen gelernt haben (s. auch **Arbeitsblatt Wie landet eine Münze?**  zum Beitrag „Wie landet eine Reißzwecke?“ auf S. 24). Von Vorteil ist außerdem, wenn die Kinder Strichlisten kennen, um Ergebnisse von Zufallsexperimenten festhalten zu können. Die Sequenz eignet sich sowohl als Einstieg in die Wahrscheinlichkeit als auch als Wiedereinstieg in das Thema in höheren Jahrgangsstufen.

Vorbereitungen

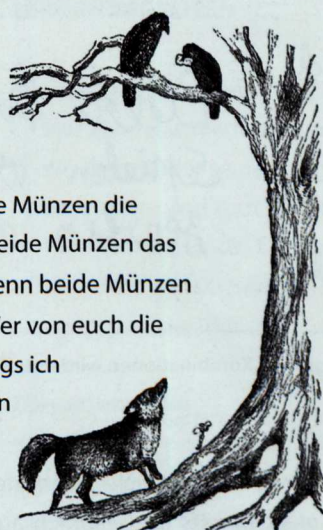
Das einzige Material, das benötigt wird, sind Münzen als Zufallsgenerator. Eine Rolle mit 50 1-Cent-Stücken und eine weitere mit 50 2-Cent-Stücken sind schnell bei der Bank oder beim Händler besorgt. Die 1,50 € sind ohne

GEBIET:	Daten, Wahrscheinlichkeit, Argumentieren
LERNBEREICH:	Daten erfassen und darstellen, Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen
SCHULJAHR:	2./3.
SOZIALFORM:	Sitzkreis, Partnerarbeit
ZEITBEDARF:	3–6 Unterrichtsstunden

DER FUCHS UND DIE RABEN

Ein dicker und ein dünner Rabe streiten sich um einen leckeren Happen. „Ich helfe euch“, schlägt der Fuchs vor.

„Kommt, wir werfen zwei Münzen gleichzeitig. Wenn beide Münzen die Zahl zeigen, gewinnt der dicke Rabe einen Punkt. Wenn beide Münzen das Wappen zeigen, gewinnt der dünne Rabe einen Punkt. Wenn beide Münzen verschiedene Seiten zeigen, bekomme ich einen Punkt. Wer von euch die meisten Punkte hat, bekommt den Happen. Habe allerdings ich am Ende die meisten Punkte, dann nehme ich den Happen als Lohn für meine Hilfe.“



Veränderung einer Illustration aus: Aesop's Fables, W. M. L. Allison, New York 1881.

Wertverlust gut in die Mathesammlung ihrer Schule investiert. Zwei Sorten Münzen machen es einfacher, den Trugschluss dieses Spiels zu entlarven.

Würfelbecher können mögliches Chaos verhindern. Es gibt Kinder, die Münzen mit dem Daumen hochschnippen und fast immer wieder auffangen können, und weitere Kinder, die sich dann angehalten fühlen, genau das auch zu üben. Eine Alternative zu teuren Würfelbechern sind Papp-Eisbecher, die man sich in Eisdielen „erbetteln“ kann, oder ein halber Klassensatz an Hartplastik-Trinkbechern (eine weitere gute, wenn auch laute Investition in die Mathesammlung).

Die Tafel wird von der Lehrkraft zur Vorbereitung wie folgt beschriftet und zugeklappt (man kann auch die Sätze zusammen mit einem Bild vom Fuchs und zwei Raben an das Whiteboard projizieren):

Der Fuchs und die Raben

1. Ist das Spiel fair? Schreibe deine Vermutung auf!
2. Spielt, bis ihr sicher seid.

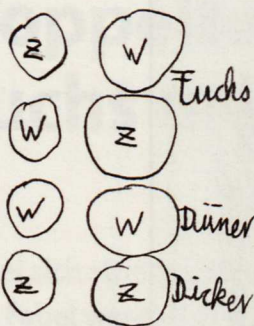
Wer gewinnt häufiger? Warum ist das so?

► Der Einstieg

Zum Einstieg im Sitzkreis teilt die Lehrkraft mit, dass sie heute eine kurze Geschichte mitgebracht habe und gespannt sei, was die Kinder dazu zu sagen hätten.

Die Geschichte wird vorgelesen. Danach dürfen sich die Kinder spontan äußern. So wird Verständnis abgesichert. Eventuelle Fragen werden gemeinsam geklärt. Einige Kinder kennen nicht die Bedeutung des Wortes „Happen“. Wenigen Kindern in den Erprobungsklassen war auch nicht klar, was ein Rabe ist. Die Schulhofkrähen helfen hier. Einige Kinder schlagen vor, dass die Tiere doch teilen können. Dann beschreiben Sie die Raben als viel zu gierig, um zu teilen. „Wieso kriegt der Fuchs denn was? Dem gehört der Happen doch nicht?“, kam in der Erprobung als Frage. „Der hat sich ja immerhin das Spiel ausgedacht“, erklärte ein anderes Kind.

Zur Reaktivierung von Vorwissen fragt die Lehrkraft, wie das denn sei, wenn man eine Münze werfe: „Kommt dann eher Wappen oder Zahl?“ „Das ist Glück!“, „Das ist Zufall!“, „Das kann man nicht wissen!“ können spontane, gewünschte Aussagen sein. „Das kann beides gleich kommen“ ist schon eine qualitative Aussage, die einige Kinder hier treffen können. Es gibt Kinder, die darauf hinweisen, dass das Spiel auch zum Schummeln verleiten kann: „Man muss richtig die Münze werfen!“ Einige Kinder lassen ein subjektives Wahrscheinlichkeitsverständnis erkennen, wenn sie meinen, bei ihnen käme häufiger das eine oder das andere Symbol. Wenige Kinder äußern animistische Vorstellungen, indem sie sagen, Wünsche könnten das Ergebnis beeinflussen oder eine übergeordnete oder göttliche Macht nähme Einfluss auf den Münzwurf (vgl. Lorenz 2006). Andere Kinder behaupten, es käme immer



Lieber Fuchs Nein ich will nicht
 Spielen weil du die meisten
 Gewinnmöglichkeiten hast.

1 Beim Aufmalen aller möglichen Kombinationen wird deutlich, dass der Fuchs die Raben übers Ohr hauen will

das Gegenteil von dem, was man brauche. Derartige Vorstellungen werden nicht bereits im Gespräch ausgeräumt. Das Experiment, das folgen wird, wird seinen Beitrag dazu leisten, das Wahrscheinlichkeitsverständnis der Kinder weiterzuentwickeln. Dennoch lohnt es sich, einmal die Gesamtheit der Münzen in die Kreismitte zu werfen und schnell sortieren zu lassen, um zu sehen, dass Zahl und Wappen ungefähr gleich häufig sind.

► Der Arbeitsauftrag

Nach dem Einstiegsgespräch, das Vorwissen reaktivieren und Verständnis absichern sollte, muss nun wieder der Bogen zurück zum eigentlichen Thema geschlagen werden. Die Kinder können selbst auf den zentralen Teil des Arbeitsauftrags der Stunde kommen: „Wie können wir denn herausfinden, ob der Vorschlag des Fuchses fair ist?“ Sicherlich wird das vielfache Wiederholen des Experiments vorgeschlagen.

Die Lehrkraft weist darauf hin, dass es ihr wichtig ist, dass erst eine Vermutung aufgeschrieben und dann das Spiel getestet wird. Die Arbeitsaufträge an der Tafel werden gezeigt. Paare von Kindern werden zur Partnerarbeit mit zwei Münzen und evtl. Würfelbechern ausgestattet.

Vermutungen äußern

Fast alle Kinder der Klassen, in denen das Spiel getestet wurde, vermuteten gleiche Gewinnchancen für alle drei Tiere: „Jeder kann ja gewinnen, wenn er Glück hat.“ „Es hat ja jeder eine Chance.“

Einige Kinder lassen ihr Wissen über Fabeln und den „schlau“ Fuchs in ihre Vermutung einfließen: „Der

Fuchs ist sicher schlauer als die Raben.“ „Vielleicht hat der Fuchs einen Trick.“ Hier ist die mögliche Ungleichverteilung der Ereignisse bereits vage impliziert.

Einzelne Kinder gehen von einem gerechten Schicksal aus und formulieren einen märchenhaften Ausgang der Geschichte: „Der dünne Rabe gewinnt, weil er mehr hungrig ist.“

Vermutungen im Experiment überprüfen


Die eigentliche Arbeitsphase ist in allen Erprobungsklassen problemlos verlaufen. Das liegt vermutlich daran, dass je zwei Kinder die Punkte für drei tierische Parteien sammeln und die Kinder keine eigenen Sieginteressen vertreten.

Viele Kinder legen selbständig Tabellen an, in denen sie die Punkte notieren. Einige sammeln die Punkte der drei Parteien einfach räumlich getrennt auf einem Blatt. Die meisten Kinder erinnern sich an den Querstrich zur Fünferbündelung in Strichlisten. Ein Paar konnte beobachtet werden, das die Punkte so sammelte, dass die Darstellung schon sehr an ein Balkendiagramm erinnerte.

Das Experiment im Hinblick auf die Vermutung auswerten

Die Auswertung erfordert etwas Geschick. Eine erste qualitative Rückmeldung ergibt sich durch die Abfrage, welches Tier am häufigsten gewonnen hat. Es stellt sich schnell die Überlegenheit des Fuchses heraus.

Zur quantitativen Auswertung müssen die Ergebnisse der Gruppen gesammelt werden. Wenn das Spiel in niedrigen Klassenstufen eingesetzt wird, mag die Anzahl der Gesamtsiege des Fuchses den erarbeiteten Zahlenraum einiger Kinder überschreiten oder zumindest deren Re-

chenfertigkeiten in dem Zahlenraum. Es sollte als Chance aufgefasst werden, hier die „Zone der nächsten Entwicklung“ anzusprechen. Die Lehrkraft sollte entscheiden, ob die Gesamtanzahlen errechnet werden oder ob eine Gesamtstrichliste erstellt wird. Im ersten Fall bietet sich eine Gelegenheit, die Kinder gruppenweise halbschriftlich die Summe der Punkte aus den Einzelnennungen errechnen zu lassen. Im zweiten Fall werden die Striche alle waagrecht nebeneinander notiert, so dass allein durch die Länge der entstehenden Balken Verhältnisse deutlich werden. Ebenso ist es, je nach Lernstand der Klasse im Kompetenzbereich Daten, auch vorstellbar, Papierstreifen aneinanderzukleben (vgl. Schwalm 2008) oder am Whiteboard ähnliche Darstellungsformen zu generieren (s. auch Vorlage **Stabdiagramm**  8 zum Beitrag „Im zweiten Schuljahr mit Glücksrädern experimentieren“ auf S. 8).

„Der Fuchs hat ungefähr doppelt so oft gewonnen wie ein Rabe.“ „Die Raben gewinnen gleich häufig.“ Diese und ähnliche Aussagen sind aus der Darstellung der Ergebnisse ableitbar.

Im weiteren Gespräch über die Ergebnisse ist ein Bezug zur Wahrscheinlichkeit herzustellen und auf die Benutzung der Begriffe „sicher, wahrscheinlich (oder möglich), unmöglich“ zu achten. „Ist es sicher, dass der Fuchs gewinnt?“ „Kann auch der dicke Rabe gewinnen?“ „Ist es wahrscheinlich/möglich, dass der dünne Rabe gewinnt?“

Ergebnisse analysieren: Warum ist das so?

Kinder, die nicht selbständig Ideen entwickeln, warum der Fuchs überlegen ist, werden angehalten, alle Möglichkeiten aufzumalen, wie die Münzen fallen können (Abb. 1). Hier zeigt sich der Vorteil der Benutzung von kleinen und großen Münzen.

Weil es vier Möglichkeiten gibt, wie die Münzen fallen können, hat der Fuchs doppelt so hohe Gewinnchancen wie jeder der Raben.

▶ Ergebnissicherung

Zur Ergebnissicherung werden die Kinder aufgefordert, die kurze Geschichte szenisch aufzuführen und sich einen Schluss auszudenken: „Jetzt wisst ihr viel über das Spiel des Fuchses. Stellt euch vor, ihr seid die Raben und wisst auch gut Bescheid. Was könnten die Raben dem

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshilfen

- ▶ Wer kann das Werfen einer Münze richtig einschätzen?
- ▶ Wer begründet seine Vermutung zum Ausgang der Geschichte und zum Wurf von zwei Münzen?
- ▶ Wem gelingt es, die Ergebnisse des Experiments übersichtlich festzuhalten?
- ▶ Wer kann den Trick des Fuchses erklären?

Förderhinweise

Kindern, denen es schwerfällt, ihre Daten zu organisieren, wird eine Tabelle vorgegeben.

Die Kinder, die in Strichlisten die Fünferbündelung nicht nutzen, werden nach der Anzahl der bisherigen Punkte beispielsweise des Fuchses gefragt. Verbunden mit der Frage, wie man die Striche aufschreiben kann, damit man die Anzahl schneller erkennen kann, kommen fast alle Kinder auf den Querstrich zur Bündelung.

Fuchs antworten?“ Schwächere Kinder können dabei Argumentationen anderer Kinder nutzen.

Zügige Theater-Spieler erhalten die Zusatzaufgabe, dass sich der Fuchs das eine oder andere faire Spiel ausdenken soll. Die Ideen der Kinder hierzu sind erstaunlich.

Andere Zufallsgeneratoren werden genannt und durch die Klasse kommentiert:

- ▶ Stäbchen ziehen: Das längste Stäbchen gewinnt.
- ▶ Würfel werfen: Jeder sucht sich eine Siegzahl aus. Fällt diese nicht, wird erneut gewürfelt.
- ▶ Würfel werfen: Jeder sucht sich zwei Siegzahlen aus.
- ▶ Die Raben werfen ohne den Fuchs eine Münze.

Wettspiele werden genannt und aufgrund der unterschiedlichen körperlichen Voraussetzungen der Tiere wieder als unfair verworfen (Wettlauf, Kastanien hochwerfen und fangen, Rechenquiz).

Aus den Ideen der Schülerinnen und Schüler ergeben sich vielfältige Ideen, die erneut experimentell geprüft oder analytisch betrachtet werden können.

Lorenz, J. H.: Dämonen und Geister. In: Grundschule Mathematik 9 (2006), S. 20–21

Schwalm, A.: Erarbeiten von Diagrammen in einem zweiten Schuljahr. In: Grundschulunterricht Mathematik 2/2008, S. 20–23.