

Arne Pöhls-Stöwesand

Unterschiede von Umkehrzahlen

Differenzieren vom Fach aus

Mathematisch reichhaltige Lernumgebungen bieten aufgrund ihrer fachlichen Substanz Differenzierungsmöglichkeiten für gemeinsames Lernen innerhalb eines breiten Begabungsspektrums. Am Beispiel der Lernumgebung „Unterschiede von Umkehrzahlen“ werden hier Erfahrungen aus mehreren Erprobungsklassen zusammengefasst.

Worum geht es? Worum kann es gehen?

Zu einer zweistelligen Zahl bildet man durch Tausch der Ziffern ihre Umkehrzahl. Im Anschluss kann man den Unterschied zwischen den beiden Zahlen berechnet (Einstellige Zahlen werden hierbei als zweistellige Zahlen geschrieben). Auf diese Art entsteht eine Reihe von Minus-Aufgaben, die die Schülerinnen und Schüler bearbeiten können.

Auf pragmatischer Ebene liegt hier ein Aufgabengenerator vor, der viele Aufgaben zur Subtraktion bietet. Mit „Unterschiede von Umkehrzahlen“ kann also die Subtraktion im Hunderter-Raum geübt und zur Geläufigkeit geführt werden. Als Besonderheit ist es mit dem Aufgabenmaterial möglich, stets Aufgaben mit Zehnerübergang zu generieren (soweit die Ausgangszahl zwei verschiedene Ziffern hat). Daher eignet sich eine Verortung im Lernprozess an derjenigen

Stelle, an der der Großteil der Klasse sich mit dieser Art Subtraktionen beschäftigt und diese wiederholt: Ende Klasse 2/ Beginn Klasse 3.

Da alle Aufgaben einer bestimmten mathematischen Struktur entspringen, stehen die Aufgaben im Zusammenhang zueinander. Die Beziehungen zwischen den Aufgaben bilden eine zusätzliche Lernchance auf mindestens zwei Ebenen. Wenn zwei Aufgaben in einer Beziehung zueinanderstehen, gibt es auch eine Beziehung zwischen den Ergebnissen. Rechengesetze lassen sich also ähnlich wie bei „Entdeckerpäckchen“ (wieder-)entdecken. Lernenden bietet sich die Möglichkeit, mehr über das Rechnen selbst zu erfahren.

Die zweite Ebene der Lernchance ist die Struktur selbst. Muster und Strukturen sind das fachliche Grundkonzept des Mathematikunterrichts der Grundschule (vergl. Wittmann u. Müller 2008). Muster in den Aufgaben, die durch die Struktur dieser Lernumgebung entstehen, und Muster in den Ergebnissen sind selbst Lerninhalt. Diese Muster können entdeckt, genutzt, beschrieben und auch begründet werden. Da-

Abb. 1:
Möglichkeiten der Sortierung

9	18	27	36	45	54	63	72	81
98-89	97-79	96-69	95-59	94-49	93-39	92-29	91-19	90-09
87-78	86-68	85-58	84-48	83-38	82-28	81-18	80-08	
76-67	75-57	74-47	73-37	72-27	71-17	70-07		
65-56	64-46	63-36	62-26	61-16	60-06			
54-45	53-35	52-25	51-15	50-05				
43-34	42-24	42-24	40-04					
32-23	31-13	30-03						
21-12	20-02							
10-01								

Zwei mögliche Sortierungen

nach Ergebnis

Warum steigen die Ergebnisse um 9?
Subtrahend um 10 größer
Minuend um 1 kleiner

Warum sind die Ergebnisse in der Spalte gleich?
Konstanzsatz der Subtraktion

nach Ziffern in Aufgaben

98-89	87-78	76-67	65-56	54-45	43-34	32-23	21-12	10-01
97-79	86-68	75-57	64-46	53-35	42-24	31-13	20-02	
96-69	85-58	74-47	63-36	52-25	42-24	30-03		
95-59	84-48	73-37	62-26	51-15	40-04			
94-49	83-38	72-27	61-16	50-05				
93-39	82-28	71-17	60-06					
92-29	81-18	70-07						
91-19	80-08							
90-09								

durch erhält diese Lernumgebung eine Verbindung zur Leitidee „Muster und Strukturen“ sowie zum Argumentieren. Wie im weiteren Verlauf noch ausführlicher geschildert wird, sind diese Muster alles andere als der Differenzierungsspielraum für begabtere Kinder in der Klasse. Es gibt leichter und schwieriger zu beschreibende und zu begründende Muster. Zum Erstaunen der Kinder kennen Sie einige der Muster aus der Multiplikation, obwohl hier ausschließlich Subtrahiert wird.

Die nächste Frage ist, wie den Schülerinnen und Schülern den Zugang zur Struktur gestaltet werden soll. In den Erprobungsklassen wird der Auftrag problemorientiert gestellt: „Finde alle möglichen Aufgaben mit Umkehrzahlen! Wie kannst du sicher sein, alle gefunden zu haben?“ Dieser Auftrag führt die meisten Kinder in eine Systematik, in der Sie das Problem in Teilprobleme zerlegen und Kombinatorische Überlegungen anstellen, z. B. „Ich suche erst alle Aufgaben mit der 9“. Andere Kinder generieren zunächst eine große Menge an Aufgaben, bis ihnen etwas auffällt. Sie Sortieren und Klassifizieren diese Aufgaben und bringen sie in Serie, so dass Vollständigkeitsbetrachtungen angestellt werden können. Dieser Prozess führt sie wiederum zu den gleichen kombinatorischen Überlegungen.

Substanz als Differenzierungsspielraum

Die in dieser Lernumgebung dargestellte Substanz bildet im Sinne einer natürlichen Differenzierung ein Angebot an die Lernenden und gibt nicht Lernziele, die alle zu erreichen haben, vor. Im Gegenteil: es gibt noch nicht einmal einen gemeinsamen Kern, an dem alle Schülerinnen und Schüler Lernfortschritte anstellen können. Das gemeinsame einer Unterrichtsstunde mit Umkehrzahlen

ist die Aufgabenstellung selbst. Diese Aufgabenstellung wird kooperativ und komplementär bewältigt. Nicht alle Kinder müssen an denselben Inhalten arbeiten und nicht alle Kinder müssen dieselben Entdeckung machen, um am Ende der Unterrichtsstunde ihre Arbeitsschritte zusammenzuführen (Abb. 1).

Die Arbeit der Kinder ist verbunden durch den gemeinsamen Problemlöseprozess, für den Aufgaben gefunden, Aufgaben ausgerechnet und Aufgaben klassifiziert und sortiert werden müssen und in dem die Schülerinnen und Schüler Muster entdecken und begründen. Zwar werden die Kinder verschiedene Entdeckung anstellen, die Gefahr, dass sie einzeln arbeiten und die Inhalte erst im Nachhinein zusammengeführt werden, ist jedoch relativ gering. Zum einen wird es natürlich Schülern und Schülerinnen geben, die dieselben Entdeckungen machen und die somit leicht in Kooperation gebracht werden können. Zum anderen wird es Ähnlichkeiten in den Entdeckungen geben, die Kinder eventuell noch nicht sehen, auf die die Lehrkraft sie jedoch vorsichtig hinführen kann.

Ziel der Lehrkraft sollte es sein, nach einer Arbeitsphase ein gemeinsames Plenum mit allen Kindern zu ermöglichen. Das Plenum ist nicht lediglich der Ort der Ergebnispräsentation. Es ist vor allem auch der Ort der Vernetzung und Vertiefung. Das Plenum kann auch eine Quelle für weitergehende Arbeitsaufträge sein.

Schon in der Planung der Unterrichtsstunde sollte also das Augenmerk der Lehrkraft darauf liegen, nicht nur alle Schülerinnen und Schüler innerhalb dieser Lernumgebung zu beschäftigen, sondern jedem auch die Möglichkeit zu geben, sich am gemeinsamen Problemlöseprozess und im Plenum inhaltlich zu beteiligen.

Darüber hinaus sollten möglichst viele Kinder Begründungen zu Mustern aufstellen oder sie nachvollziehen können.

KLASSENSTUFE

2 – 3

ZEITBEDARF

variabel

KOMPETENZEN INHALTSBEZOGEN

- Subtraktion im Hunderterraum (ggf. Materialgestützt)
- Vertiefung von Rechengesetzen der Subtraktion
- Vertiefung Stellenwert-Verständnis
- Kombinatorik
- Bezug zur Neuner-Reihe

KOMPETENZEN PROZESSBEZOGEN

- Mathematische Handlungen: Sortierung, Klassifikation, Seriation ...
- Problemlösen
- Entdecken, Nutzen und Beschreiben von Mustern
- Begründen von mathematischen Phänomenen
- Nutzen von Darstellungen ...

MATERIALPAKET



Material auf der CD-ROM

11 Arbeitsblatt mit Strukturierungshilfe

Die Inszenierung

Zur Inszenierung der Lernumgebung wählt die Lehrkraft zwei Ziffernkarten aus und fragt, welche Zahlen man aus den Ziffern bilden kann. Es gibt immer wieder Kinder, die nun die Summe der Zahlen auf den Ziffernkarten nennen. Es ist gut, wenn dieses Missverständnis aufkommt – nur so kann es geklärt werden.

Wenn die beiden Zahlen genannt sind, evtl. 36 und 63, wird er Begriff der Umkehrzahl eingeführt. „36 ist die Umkehrzahl von 63. 63 ist die Umkehrzahl von 36“

Nun soll eine Minus-Aufgabe mit den beiden Zahlen gerechnet werden. Weitere Beispiele werden zu Minus-Aufgaben gelegt aber nicht ge-

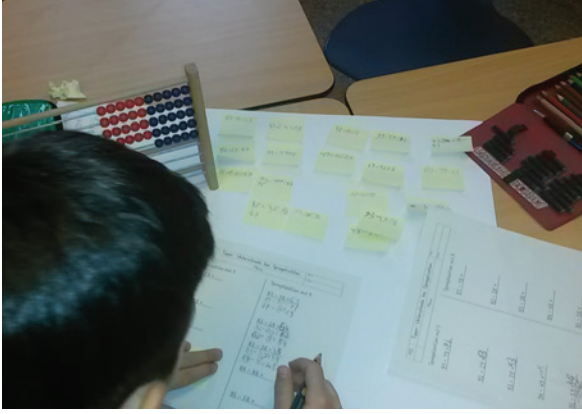


Abb. 2: Vasil erhält zur Unterstützung den Rechenschieber und ein vorstrukturiertes Arbeitsblatt

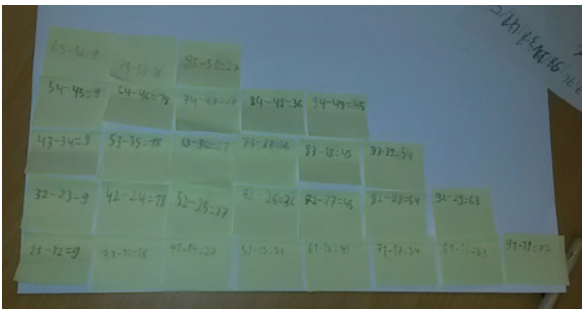


Abb. 3: Der Beginn einer Sortierung

rechnet – sonst könnte es passieren, dass schon bei der Einführung ein Muster in den Ergebnissen genannt wird. So prägen sich die Handlung und der neue Begriff der Umkehrzahl ein. Die Lehrkraft muss darauf achten, dass bei Ziffernpaare mit der Null bei dieser Aufgabe eine Besonderheit auftritt. Die Umkehrzahl von der 20 ist die 02: die 2 wird also ausnahmsweise zweistellig gedacht und geschrieben.

Arbeitsphase

Sortieren, Klassifizieren und Seriieren sind bedeutungsvolle mathematische Handlungen von der Vorschul- bis zur Hochschulmathematik. Damit möglichst alle Kinder sich am Sortieren beteiligen können, benötigen sie ein Material, mit dem mathematische Objekte handlungsorientiert strukturiert und vor allem umstrukturiert werden können.

Die Kinder erhalten Haftnotiz-Zettel, auf die sie ihre gefundenen Aufgaben mit Ergebnis notieren sollen. Jeder Klebezettel soll eine Aufgabe erhalten. Haftnotizzettel haben den Vorteil, dass sie ausreichend oft von einer Grundlage gelöst werden und neu geklebt können. Die Klebezettel werden mit den Aufgaben gruppenweise auf einen Blatt gesammelt.

Haftnotizzettel der Größe 38 x 52 mm sind ein praktikables Format. Ein halbiertes Flipchartpapier hat die ideale Größe zum Sammeln.

Die Kinder sollen kooperativ Aufgaben generieren. Erkennen von Mustern und Finden von Strukturen ist einfacher, wenn eine größere Anzahl an Daten vorliegt. Daher gehen die Kinder arbeitsteilig vor. Auf diese Art und Weise können sich alle Kinder am gemeinsamen Forschungsprozess der Gruppe beteiligen (Abb. 2 – 5).

Alle Kinder einbinden

In diversen Lehrerfortbildungen hat der Autor ein Gerüst dieser Lernumgebung vorgestellt. Zahlreiche Kolleginnen und Kollegen haben gemeinsam überlegt, wie möglichst allen Kinder ihrer Klasse ein Zugang zu der Aufgabe ermöglicht werden kann.

1. Arbeitsmittel:

Eine (scheinbare) Einstiegsschwelle dieser Lernumgebung ist, dass die Subtraktion im Hunderterraum ausgeführt werden kann. Rechenschieber und Ähnliches dienen Kindern mit Schwierigkeiten bei der Subtraktion als Lösungshilfe. Darüber hinaus können sie auch als Argumentationshilfe für tiefere Erkundungen genutzt werden.

2. Hilfe beim Finden der Aufgabe:

Kostas erhält ein Arbeitsblatt (AB 11), auf dem bereits alle Aufgaben mit der Ziffer 9 sortiert und mit Platz für einen Rechenstrich abgedruckt sind. Kostas hat sowohl Schwierigkeiten, sich selbst zu organisieren als auch beim Rechnen. Er soll die Aufgaben

ausrechnen und kann dann das Muster in der Reihung der Aufgaben evtl. erkennen und auf alle Aufgaben mit der 8 übertragen.

3. Nur Aufgaben finden:

Nina fällt das Rechnen im Hunderterraum schwer. Sie verwechselt oft die Namen der Zahlen durch Zahlendreher. Sie wird eingebunden, indem sie die Aufgaben findet und benennt. Arbeitsteilig rechnen dann andere Kinder ihre Aufgaben aus.

4. Taschenrechner:

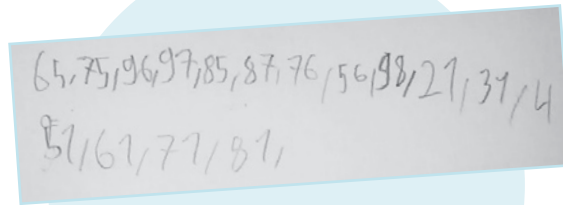
Kinder, die den Hunderterraum schon gut erschlossen haben, aber nicht Subtrahieren können, kann ein Taschenrechner die Beteiligung am Problemlöseprozess ermöglichen. Außerdem gibt er ihnen die Möglichkeit, die Muster, die sich ergeben, zu erkennen.

5. Komplementäre Teilaufgabe:

Mats arbeitet in einer Gruppe, in der er den Auftrag hat, alle Aufgaben mit Null zu finden. Dadurch berechnet er nur die Aufgabensorte „Glatte Zehnerzahl minus Einerzahl“, die er materialgestützt beherrscht.

6. Verortung im Lernprozess:

Ein Schwerpunkt dieser Aufgaben kann auf dem Üben der halbschriftlichen Subtraktion im Hunderterraum liegen. Wartet man aber noch eine Zeit ab, beispielsweise bis zum der dritten Klasse, wird sich die Ausrichtung der Aufgabe verändern. Die Rechenanforderungen sich nun für weniger Kinder eine Herausforderung. Mehr Kinder beteiligen sich dadurch tiefer am Problemlöseprozess



57, 67, 77, 87,

9. Reihe Treppe.

Abb. 4: Eine Gruppe entwickelt eine Struktur, nach der sie vorgeht.

Abb. 5: Rashids knappe Entdeckung

Zwischen-Plenum

In einem ersten Zwischenplenum empfiehlt es sich, den Blick vom Finden der Aufgaben auf das Muster in den Ergebnissen zu lenken. Wenn die Kinder berichten sollen, wie sie die Aufgaben gefunden haben, erwähnen Sie vielleicht etwas wie, „Wir haben immer die 1 genommen und andere Zahlen dazu.“ In anderen Klassen mag sich die erste Bemerkung auf die Ergebnisse richten: „Wir haben immer Zahlen aus der Neunerreihe.“

Die Lehrkraft sollte hier sammeln und zwar so, dass sie die einzelnen Aufgaben im Nachhinein noch umsortieren kann: A5-Zettel an der Tafel, Folien-Ausschnitte auf dem Tageslichtprojektor oder Gruppierungen am digitalen Whiteboard bieten sich an. Damit sich an dieser fundamentalen Handlung des Sortierens möglichst viele Kinder beteiligen, wird die Sammlung immer wieder zurück an die Kinder gespiegelt. „Wer hat noch eine Aufgabe mit diesem Ergebnis?“ oder „Wer hat noch Aufgaben mit der 1?“ Ein weiteres Ziel dieses Zwischenplenums ist das quasi selbstständige Finden einer Forschungsfrage für die nächste Explorations-Phase gibt durch die Kinder: „Wir finden alle Aufgaben mit der 2, 3, 4 usw.“ oder „Wer findet noch Aufgaben mit dem Ergebnis 9, 18, 27 usw.“

In der zweiten Arbeitsphase übernehmen die Gruppen die Systematik. Einige Kleingruppen werden vor den anderen Gruppen alle 45 Aufgaben gefunden haben. Sie sollen festhalten, warum sie sicher sind, dass es nur 45 Aufgaben gibt“ Eine weitere Anschlussfrage ist: „Welche Zahlen bringen als Ergebnis 9 (18, 27 ...)?“

Abschlussplenum: Warum?

Neben einer Sammlung an Ergebnissen, lassen sich einige vertiefende Warum-Fragen klären und Begründungen suchen. Da sich die Muster, die beschrieben, hinterfragt und begründet werden, wiederholen, können sich viele Kinder an dem Begründungs-

prozess beteiligen. Wählt die Lehrkraft beispielsweise alle Aufgaben mit dem Ergebnis 45 aus der Sammlung (siehe Abb. 1, grüne Markierung) und schiebt sie untereinander, entsteht etwas, das den Kindern vertraut ist. Das Türmchen sieht aus wie ein Entdeckerpäckchen oder „Schönes Päckchen“. Die Kinder können ihr Wissen reaktivieren: „Die erste Rechenzahl erhöht sich immer um 11. Die zweite Rechenzahl erhöht sich immer um 11. Dann bleibt das Ergebnis gleich.“ Auch aus den in der Sortierung nebeneinanderstehenden Aufgaben, lässt sich ein Entdeckerpäckchen legen. (Abb. 1, rote Markierung). Hier steigen die Ergebnisse immer um 9, „weil man nimmt immer [von hinten gesehen] 10 mehr weg und hat aber einen mehr.“ Diese beiden exemplarischen Beschreibungen lassen sich wiederholen und mit Materialhandlungen nachlegen. Mehr Kinder können so in den Prozess des Beschreibens und Begründens einbezogen werden.

Warum sind nun aber alle Ergebnisse in der 9er-Reihe und mehr noch, warum gibt der Abstand der Ziffern an, an welche Position der Neunerreihe das Ergebnis stehen wird? Diese Frage verschiebt die Lehrkraft auf den Beginn der nächsten Stunde und bereitet eine kleine Demonstration vor: An der Stellenwerttafel wird die 38 mit Wendeplättchen gelegt. Aus ihr soll die 83 entstehen – und zwar Schritt für Schritt. Schiebt man ein Plättchen von den Einern zu den Zehnern, so hat man: „Ein Einer weniger, ein Zehner mehr“ – also +9. Dies kann man 5 Mal wiederholen: 5 mal 9 ist 45; 45 ist also der Unterschied zwischen den Zahlen. An jeder beliebigen Zahl kann diese begründende Handlung wiederholt werden. Ist der Abstand der Ziffern 4, kann man vier Mal schieben; ist der Abstand 3, drei Mal ... Diese Materialhandlung kann den Kindern zu diesem Zeitpunkt schon gut vertraut sein. Die Auswirkungen von verschobenen Plättchen auf der Stellenwerttafel haben sie be-

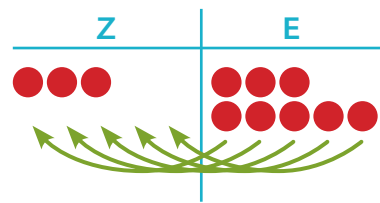


Abb. 6: Materialhandlung

reits bei der Zahlenraumerweiterung bis 100 erlebt (Abb. 5).

Eine weitere Begründung lässt sich den Kindern in diesem Zusammenhang: in Minusaufgaben werden „Stellenwerte extra“ aufgeschrieben

$$83 - 38 = 50 - 5$$

$$80 - 30$$

$$3 - 8$$

Es entstehen 50 Zehner von denen fünf Einer abgezogen werden. Von jedem Zehner kann also ein Einer abgezogen werden. Es entstehen fünf 9er. Am Abakus oder mit Steckwürfelstangen können die Schülerinnen und Schüler die Zehner, die zu Neunern werden, sehen und als solche begreifen. Auch hier bieten sich Wiederholungen an. Auch diese Argumentation kann den Kindern schon aus der Erarbeitung der Neunerreihe vertraut sein: 5 mal 9 ist 10 mal 9 minus 5.

Gemeinsames Lernen kann also auch spiralcurricular gedacht werden, was die Einbindung von Entdeckerpäckchen, Plättchenverschiebungen und der Neunerreihe zeigt.

Literatur
Wittmann, E. Ch. u. G.N. Müller (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept
In: Walther, G. u. a. (Hrsg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 40 – 63.

Übersatz
bitte kürzen

LERNEN BEGLEITEN – INKLUSIV DENKEN

Beobachtungshinweise

- Kann das Kind sicher (materialgestützt) subtrahieren?
- Findet das Kind Aufgaben strukturiert?
- Findet das Kind weitere Aufgaben durch Sortierung?
- Erkennt das Kind ein Muster in den Ergebnissen?
- Kann das Kind Muster in den Ergebnissen erklären?
- Kann das Kind fremde Begründungen von einem Beispiel auf ein anderes übertragen?

Förderhinweise

In dieser Lernumgebung sind viele Teilbereiche der Grundschulmathematik angesprochen. Nicht jedes Kind muss jeden Bereich berühren, wenn dies seinem Lernstand nicht entspricht.