

Arne Pöhls

# Forschen von Anfang an

## Spielerisch und informierend Forscheraufgaben zu Zahlenketten einführen

In einer Unterrichtssequenz zu Zahlenketten wird in (fast) jeder Stunde ein anderer Einstieg gewählt. Jeder fordert die Kinder zu mathematischen Entdeckungen heraus. So werden sie langsam an problemorientierte Forscheraufgaben herangeführt.

Zahlenketten sind ein substantielles Aufgabenformat, das flexibel in verschiedenen Lerngruppen eingesetzt werden kann. Nach dem Prinzip der natürlichen Differenzierung ermöglicht das Format außer Rechnen, Muster und Strukturen zu entdecken und zu begründen. Darüberhinaus regt es Problemlöseprozesse auf verschiedenen Niveaus an (vgl. Selter/Scherer

1996). Durch Variation der Länge der Zahlenkette oder des angestrebten Zahlenraums kann es an verschiedene Jahrgangsstufen angepasst werden. Auch innerhalb einer Jahrgangsstufe lassen sich durch diese Variationen leistungsschwache und -starke Kinder gleichermaßen fordern und damit fördern. Das Format lässt sich auch formal algebraisch fassen (s. Kasten).

Findet möglichst viele Zahlenketten mit der Zielzahl 20 (oder 100)! Findet ihr alle? Diese herausfordernde Aufgabenstellung bildet den Abschluss einer Unterrichtssequenz. Mit zwei strukturgleich aufgebauten Unterrichtseinheiten können 4-gliedrige Zahlenketten in Kl. 1/2 und 5-gliedrige Zahlenketten in Kl. 2/3 erforscht werden (8 und 9 Arbeitsblätter zu Zahlenketten).

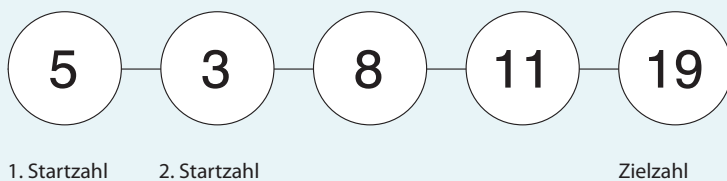
In den ersten Stunden der Sequenz lernen die Kinder Zahlenketten kennen, sie verstehen und verinnerlichen ihre Bauregel. Darüber hinaus werden sie auch ins Problemlösen eingeführt. Forscheraufträge werden von Beginn an integriert und die Kinder aufgefordert, ihre Entdeckungen zu beschreiben.

Die Unterrichtssequenzen können gut eingesetzt werden, wenn die Kinder sich im Zwanziger- bzw. Hunderterraum orientieren und weitgehend sicher in ihm rechnen können. Gerade zur Vertiefung des Gelernten kann die Unterrichtssequenz am Ende des jeweiligen Schuljahrs oder zu Beginn des folgenden durchgeführt werden.

Die gleiche Unterrichtssequenz kann auch in höheren Jahrgangsstufen durchgeführt werden. Dabei ändert sich das Anspruchsniveau: Das produktive Üben der Addition und

### ZAHLENKETTEN

Eine Zahlenkette beginnt mit zwei Startzahlen, die nebeneinander geschrieben werden. Neben zwei Zahlen steht jeweils deren Summe:



Die Länge einer Zahlenkette ist variabel. Dargestellt ist eine 5-gliedrige Zahlenkette (kurz: 5er-Kette). Als 4-gliedrige Zahlenkette hätte sie die Zielzahl 11, als 6-gliedrige die Zielzahl 30.

Benennt man die erste Startzahl mit  $a$  und die zweite Startzahl mit  $b$ , erhält man als Zielzahl einer 4-gliedrigen Kette  $a + 2b$  und einer 5-gliedrigen Kette  $2a + 3b$ . Auf Grundschulniveau kann man die dahinterliegende Erkenntnis inhaltlich formulieren:

- Zielzahl der 4er-Kette: Die erste Startzahl geht einmal, die zweite Startzahl geht doppelt in die Zielzahl ein.
- Zielzahl der 5er-Kette: Die erste Startzahl  $a$  geht zweifach ein, die zweite Startzahl  $b$  dreifach in die Zielzahl ein.

Wie viele 5er-Ketten mit Zielzahl 100 gibt es? Solche Fragen lassen sich durch systematisches Verändern von Zahlenketten beantworten.

## Zahlenketten reparieren

Welche Zahlen fehlen? Beachte immer die Bauregel!

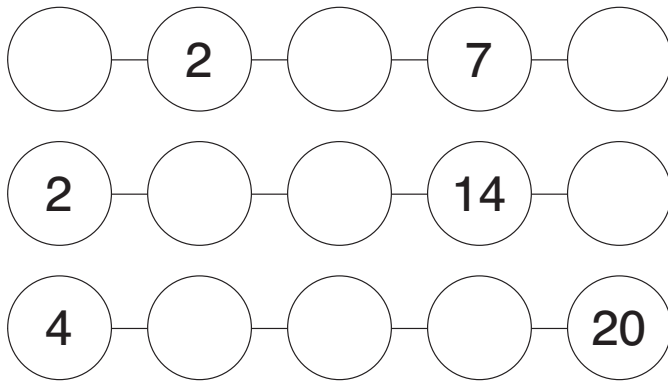


Abb. 1: Lücken in Zahlenketten zu berechnen, erfordert Ergänzen und Subtrahieren.

Subtraktion tritt für die meisten Kinder in den Hintergrund, während das Problemlösen oder das vollständige Begründen entdeckter Muster in den Vordergrund tritt (vgl. Scherer 1997).

Die Einstiege in die verschiedenen Stunden lassen sich methodisch unterschiedlich gestalten: Mit der gesamten Lerngruppe, zu zweit oder allein, lehrer- oder schülerzentriert, spielerisch oder informativ.

### Bauregel einführen: Informativ oder entdeckend?

Ein informativer Einstieg zu Zahlenketten kann so aussehen, dass die Lehrkraft eine leere Zahlenkette an die Tafel zeichnet und die Bauregel erklärt. „Dies ist eine besondere Kette: eine Zahlenkette. In die ersten beiden Felder schreibt man zwei Zahlen. Das sind die Startzahlen. Ich suche mir die 5 und die 3 aus. Die weiteren Felder werden nach einer ganz bestimmten Bauregel gefüllt. Was ergibt 5 plus 3? ... Die 8 schreibe ich in den nächsten Kreis.“ So werden die leeren Kreise gemeinsam mit den Kindern gefüllt. Abschließend wird zur letzten Zahl erklärt: „Die letzte Zahl ist die Zielzahl.“ Bei diesem Einstieg wird die Bauregel von der Lehrkraft vorgestellt. Die Kinder können Startzahlen erfinden,

die Zielzahl berechnen und sie können die Zahlen eintragen.

Alternativ wird hier vorgeschlagen, die Bauregel von den Kindern entdecken zu lassen. Auch dazu präsentiert die Lehrkraft den Kindern eine leere Zahlenkette an der Tafel und schreibt in die ersten beiden Felder jeweils eine Zahl als Startzahl (z. B. 5 und 3). Anschließend ergänzt sie gemäß der Bauregel von Zahlenketten schrittweise die restlichen Zahlen (im Beispiel 8, 11 und 19). Sie zeigt auf das dritte, vierte und fünfte Feld und fordert die Kinder auf: „Findet heraus, nach welcher Bauregel ich die Zahlen in diesen Feldern gefunden habe!“

Erst alleine und dann gemeinsam mit den Tischnachbarn können die Kinder so die Bauregel für Zahlenketten selbst entdecken und beschreiben. So wird von Beginn an ein forschender Einstieg ermöglicht. Je nach Schreibkompetenz der Klasse kann die Bauregel auch verschriftlicht werden (8, 9 a. Wie sind Zahlenketten aufgebaut?).

Nachdem die Rechenregeln besprochen sind, kann ihre Anwendung geübt werden (8, 9 b. Zahlenketten berechnen). Zur weiteren Festigung der Bauregel bietet sich an, in lückenhaften Zahlenketten leere Felder ergänzen zu lassen (8, 9 c. Zahlenketten reparieren, Abb. 1).

### KLASSENSTUFE

1–4

### ZEITBEDARF

3–6 Unterrichtsstunden

### KOMPETENZEN INHALTLICH

- Bauregel von Zahlenfolgen erkennen und anwenden
- Muster von Zahlenketten erkennen, beschreiben und fortsetzen
- Zahlenketten systematisch verändern und beschreiben
- Flexibel rechnen: Addieren und subtrahieren

### KOMPETENZEN PROZESSBEZOGEN

- Problemlösen
- Argumentieren
- Kommunizieren

### ZUSÄTZLICHES MATERIAL

Spielwürfel: Für je zwei Kinder wird ein Würfel benötigt. Je nach Jahrgangsstufe und Länge der Zahlenkette kann mit einem 6-seitigen, 10-seitigen oder 20-seitigen Würfel gespielt werden.

### MATERIALPAKET



#### Material auf der CD-ROM

- 8 Arbeitsblätter zu Zahlenketten (4er-Kette Klasse 1/2)
- 9 Arbeitsblätter zu Zahlenketten (5er-Kette Klasse 2/3)

Die Arbeitsblattreihen sind strukturgleich aufgebaut:

- Wie sind Zahlenketten aufgebaut?
- Zahlenketten berechnen
- Zahlenketten reparieren
- Zahlenketten-Spiel
- Forscheraufträge
- Zahlenketten mit Zielzahl 20 bzw. 100
- Leere Zahlenketten (Blanko-Vorlage)

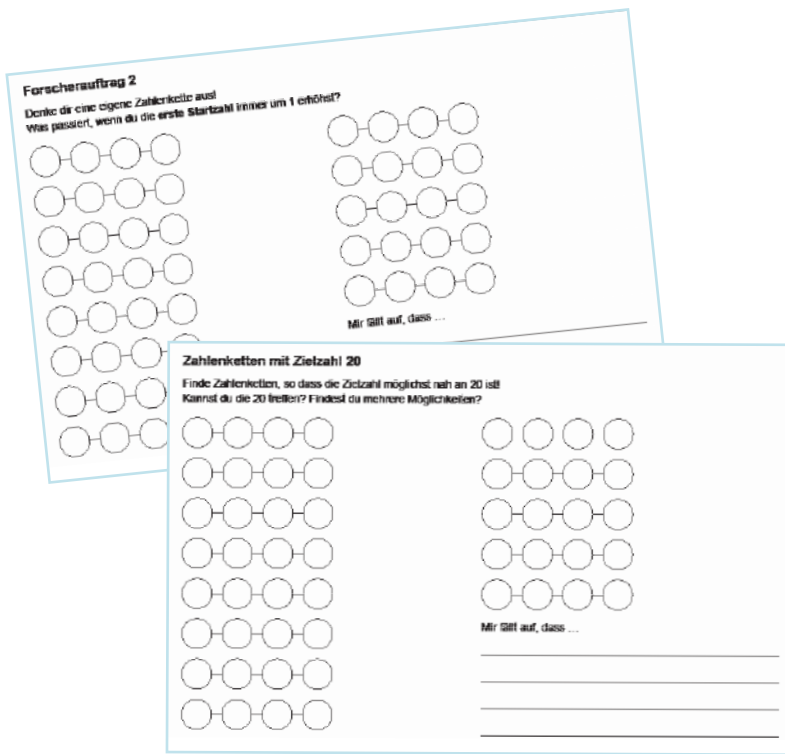


Abb. 2: Der große Forscherauftrag wird durch gelenkte Forscheraufträge vorbereitet.

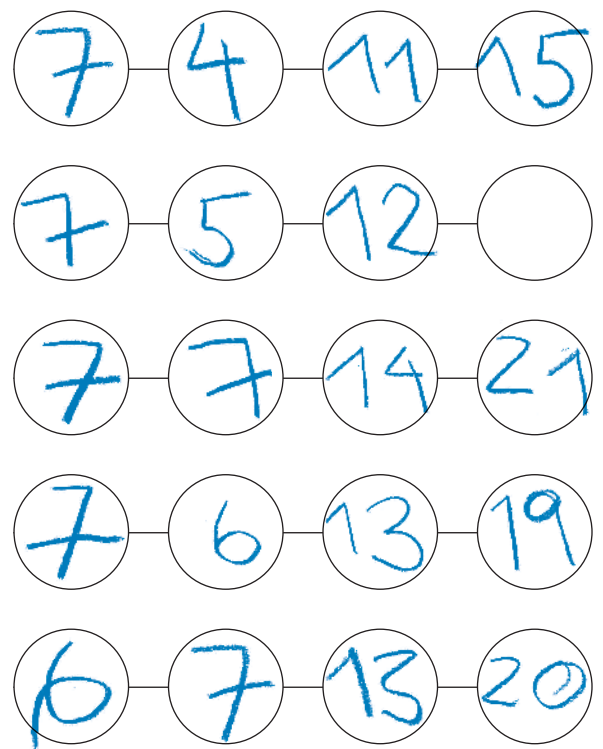


Abb. 3: Robin findet eine Zahlenkette zur Zielzahl 20 systematisch probierend.

Die Zahlenketten auf dem Arbeitsblatt sind meist eindeutig lösbar, dennoch ist es anspruchsvoller sie zu lösen: Beim Finden der fehlenden Zahlen ist flexibles Rechnen gefragt. Nicht alle Felder lassen sich über einfaches Addieren lösen, sondern manchmal muss auch subtrahiert und ergänzt werden. Besondere Herausforderungen stellen die Zahlenketten dar, die nicht in einem Schritt vervollständigt werden können. Auf dem Arbeitsblatt für Kl. 2/3 ist die letzte Zahlenkette unlösbar.

So werden von Beginn der Unterrichtssequenz an prozessbezogene Kompetenzen gefördert: Es muss probiert werden, um die Bauregel zu finden und Zahlenketten zu reparieren (Problemlösen), es muss begründet werden, warum die Kette nicht lösbar ist (Argumentieren) und die Vorgehensweise muss einem Partner oder der gesamten Lerngruppe erläutert werden (Kommunizieren).

### Spielerischer Einstieg

Die nächste Unterrichtsstunde kann mit einem Partnerspiel beginnen. Die Spielregeln können nicht entdeckt werden, sondern müssen von der Lehrkraft eingeführt werden. Es bie-

tet sich an, zur Demonstration des Spielablaufs ein paar Durchläufe von zwei Kindern an der Tafel spielen zu lassen.

Die Spieler würfeln abwechselnd. Je nach Jahrgangsstufe und Länge der Kette kann mit einem 6-seitigen, 10-seitigen oder 20-seitigen Würfel gespielt werden. Die gewürfelte Zahl wird entweder als erste oder zweite Startzahl in die eigene Zahlenkette eingetragen (8, 9 d. Zahlenketten-Spiel). Wichtig ist, dass die erste gewürfelte Zahl eingetragen wird, bevor die zweite Zahl gewürfelt wird. Wenn beide Spieler ihre Startzahlen eingetragen haben, werden die restlichen Felder der Zahlenketten berechnet. Wer die höchste Zielzahl hat, gewinnt die Runde. Werden mehrere Runden gespielt, gewinnt der Spieler mit den meisten Punkten.

Didaktisches Ziel dieses Spiel ist, dass die Kinder darüber nachdenken, ob es eine günstige Spielstrategie gibt, um zu gewinnen. Diese Fragestellung wird bewusst noch nicht zum Stundenbeginn gestellt. Kinder können nicht nur Antworten auf diese Frage finden, sondern den implizierten Forscherauftrag selbst finden.

Als wesentliche Gewinnstrategie soll hier erkannt werden, dass die höhere der beiden Zahlen als zweite

Startzahl genutzt wird. „Die zweite Startzahl zählt mehr“ formuliert Roman. Da hier allerdings die Zahlenkette mit einem Zufallsgenerator gefüllt wird, müssen die Kinder eine Risiko-Abschätzung vornehmen. Kinder, die die Rolle der zweiten Startzahl schon erkannt haben, würden eine 20 auf dem 20-seitigen Würfel dort eintragen. Doch wie ist es bei Zahlen nahe am Mittelwert des Würfelzahlen? Es ist aufschlussreich, wenn Kinder ihre Entscheidung begründen. Auch wenn Siege durch verschiedene Faktoren bestimmt werden, führt die Frage nach der Spielstrategie zu einer ersten Analyse der Struktur von Zahlenketten.

### Gelenktes Forschen

In den Forscheraufträgen auf den folgenden Arbeitsblättern werden die Startzahlen operativ verändert – in diesem Fall sukzessive um 1 erhöht oder vermindert (8, 9 e. Forscheraufträge). Dadurch, dass die beiden Startzahlen jeweils unterschiedlich häufig in die Zielzahl eingehen, wirken sich ihre Veränderungen unterschiedlich stark auf die Zielzahl aus. Dies qualitativ zu beschreiben ist Aufgabe der Kinder.

Als Einstieg in diesen Themenkomplex ist der erste Forscherauftrag gedacht: Zu einer Folge von Zahlenketten sollen ihre Zielzahlen und Auffälligkeiten beschrieben und erklärt werden. Der Forscherauftrag kann als Impuls an die Klasse gegeben werden. Es steht im Vordergrund Muster zu entdecken und zu beschreiben. Kinder stellen ihre Entdeckungen auf unterschiedliche Art dar, manche nutzen Operatorpfeile oder Kreise ein, andere beschreiben verbal.

Vielleicht gibt es mathematisch begabte Kinder, die zu diesem Zeitpunkt schon sehr vollständig erklären. Diese können in den folgenden Forscheraufträgen Verallgemeinerungen und Begründungen finden.

Kinder die bei diesem Forscherauftrag eher einfache Entdeckungen anstellen, können nach einem Zwischenplenum Transferleistungen erbringen.

Ein Zwischenplenum über einen bearbeiteten Forscherauftrag eignet sich jeweils als Einstieg in den nächsten. Wer ungeübt ist, operative Veränderungen zu beschreiben und zu begründen, kann Plenumsbeiträge anderer Kinder als Grundlage für eigene Entdeckungen im nächsten Auftrag nutzen. Darum sollten Kinder diese Forscheraufträge nicht einfach abarbeiten. Die Lehrkraft kann zügig arbeitende Kinder durch gezielte Nachfragen tiefer in die Struktur der Zahlenketten vordringen lassen, indem sie immer genauere Begründungen einfordert. Auf Blankovorlagen können sie die Entdeckungen an anderen (größeren) Zahlenketten bestätigen (8, 9 g. Leere Zahlenketten).

## Der große Forscherauftrag

Durch den bisher beschriebenen Unterrichtsverlauf sind die Kinder auf den abschließenden großen Forscherauftrag vorbereitet (8, 9 f. Zahlenketten mit Zielzahl 20 bzw. 100, Abb.2). Sie haben verschiedene Erfahrungen mit problemorientierten

Aufgaben gesammelt, Vorgehensweisen und Darstellungen ausprobiert und besprochen. Weiterhin können sie Erkenntnisse aus den vorangegangenen Stunden transferieren.

Der Einstieg in den Forscherauftrag wird als rein informativer Einstieg empfohlen. Motivierend wirkt hier die Herausforderung: „Schafft es die Klasse 2c, alle möglichen Zahlenketten mit der Zielzahl 20 zu finden?“

Zahlenketten, die „nah an der 20“ liegen, können auch helfen. Zum einen muss diese Ketten niemand anders mehr berechnen und zum anderen können sie durch operative Veränderungen eventuell in Ketten mit Zielzahl 20 umgewandelt werden.

Es ist anzuraten, dass die Kinder auf Radieren verzichten, da sie so auch die Zahlenketten vor Augen haben, die nicht zur Zielzahl führen. Sie können weitere Zahlenketten durch operative Veränderungen ableiten. So sieht Robin, dass seine Zielzahl 1 zu groß ist und ändert deshalb eine der Startzahlen. Er beschreibt dies so: „Erst war es eins zu viel, dann habe ich eins weniger.“

Auch seine Annäherung an die 20 ist spannend (Abb. 3): Er beginnt mit den Startzahlen 7 und 4. Für die weiteren Ketten lässt er die erste Startzahl unverändert und erhöht die zweite. Es ist möglich, dass er diese Strategie von den vorherigen Forscheraufträgen überträgt. Schließlich vertauscht er die Startzahlen.

Bis zu einem durch die Lehrkraft vorgegebenen Zeitpunkt sollten die Kinder alleine forschen. Erst danach dürfen bereits gefundene Zahlenketten für die Tafel gesammelt werden. Dazu stehen große Zahlenketten zur Verfügung.

In der folgenden Stunde kann gemeinsam überlegt werden, wie man herausfinden kann, ob die Klasse alle Zahlenketten gefunden hat. Wenn die Kinder nicht selbst auf die Idee kommen, schlägt die Lehrkraft vor, die bereits gefundenen Zahlenketten zu sortieren. Sortiert man sie nach

## LERNEN BEGLEITEN

### Beobachtungshilfen

- Wer beherrscht die Rechenvorschrift für Zahlenketten?
- Wer setzt operative Veränderungen fort? Wer wendet sie auf andere Zahlenketten an?
- Wer beschreibt das Muster? Wer begründet es?
- Wer erkennt den unterschiedlichen Einfluss der beiden Startzahlen auf das Ergebnis?
- Wer findet einige Zahlenketten mit vorgegebener Zielzahl? Wer findet viele?
- Wer kann seine Vorgehensweise beschreiben?
- Wer erkennt durch Sortieren der Zahlenketten fehlende Zahlenketten mit vorgegebener Zielzahl?

### Förderhinweise

Die Forscheraufträge folgen dem Prinzip der natürlichen Differenzierung. Die Einstiegsschwelle ist niedrig gewählt. Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen können Hilfsmittel zum Rechnen zur Verfügung gestellt bekommen. Das Niveau der Aufgaben ist leicht anpassbar. Dabei ist der gewählte Zahlenraum bei weitem nicht die einzige Möglichkeit. Kinder können auf unterschiedlichen Niveaus beobachtete Muster und Strukturen beschreiben und begründen. Starke Kinder können aufgefordert werden, entdeckte Muster zu überprüfen und zu nutzen.

der ersten oder zweiten Zielzahl, lassen sich Muster zwischen den einzelnen Kettengliedern aufeinanderfolgender Zahlenketten entdecken. Können nun die noch fehlenden Zahlenketten gefunden werden? Lassen sich die Erkenntnisse auf eine andere Zielzahl oder eine andere Kettenlänge übertragen?

### Literatur

Die in der Erprobung der Unterrichtssequenz genutzten Arbeitsblätter wurden vom ehemaligen SINUS-Koordinator Mike Schlöder entwickelt.

Scherer, P.: Substantielle Aufgabenformate – jahrgangsübergreifende Beispiele für den Mathematikunterricht, Teil 2. In: Grundschulunterricht 4 (1997), S. 36–38.

Scherer, P.; Selter, Ch.: Zahlenketten – ein Unterrichtsbeispiel für natürliche Differenzierung. In: Mathematische Unterrichtspraxis 2 (1996), S. 21–28.