

100 zerlegen mit Malkreuzen

Ein Darstellungsmittel früh vorbereiten

Im dritten Schuljahr beim halbschriftlichen Multiplizieren ist das Malkreuz ein wichtiges Veranschaulichungs- und Darstellungsmittel. Die Kinder können mit seiner Hilfe selbst entdecken und darstellen, wie man große Zahlen multiplizieren kann. Dafür können schon im zweiten Schuljahr die Grundlagen geschaffen werden, beispielsweise beim Zerlegen von Hunderterfeldern.

Zeitbedarf

2–3 Unterrichtsstunden.

Kompetenzen inhaltlich

Die Grundaufgaben des Einmaleins gedächtnismäßig beherrschen. Strukturierte Zahldarstellungen verstehen und nutzen. Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern und Rechengesetze erkennen und beschreiben.

Kompetenzen prozessbezogen

Problemlösen. Argumentieren. Darstellen.

Zusätzliches Material

3 Folien für den Tageslicht-Projektor.

Materialpaket



2 Hunderterfelder mit Malkreuzen und Geraden

3 Rechtecke in Rot, Gelb, Grün und Blau

Beide Blätter auf Folie kopieren. Die Geraden abschneiden, damit sie auf dem Hunderterfeld verschoben werden können. Mit den farbigen Rechtecken Teilfelder markieren.

4 100 zerlegen. Die Kinder zerlegen das Hunderterfeld und tragen die gefundenen Zerlegungen in Malkreuze ein.

5 Verschiedene Zerlegungen finden. Die Kinder suchen nach möglichst vielen voneinander verschiedenen Zerlegungen. Arbeitsblatt in zwei Varianten.

6 Diese Zerlegung haben wir gefunden. Großes Malkreuz zum Präsentieren an der Tafel.

7 100 zerlegen mit Malkreuzen. Datei zur Nutzung am interaktiven Whiteboard, alternativ zu den Folien einsetzbar.

Durch zwei Geraden kann man ein Punktefeld in vier rechteckige Teilfelder zerlegen. Diese werden als Malaufgaben gedeutet. Trägt man die zugehörigen Faktoren und Ergebnisse in eine Mal-Tabelle ein, entsteht automatisch ein Malkreuz (Abb. 1).

Das Malkreuz ist als Anschauungs- und Darstellungsmittel eine mächtige Argumentationshilfe. Nach Wittmann & Müller kann es „als wichtigste halbschriftliche Strategie beim Multiplizieren“ (1992, S. 59) gelten und gehört damit zum Kern des Rechenunterrichts spätestens ab Klasse 3. Es lohnt sich aber, schon ab Klasse 2 mit dem Malkreuz zu arbeiten, denn es hilft bei schwierigen Aufgaben (vgl. Wittmann & Müller 1990, S. 132 ff.).

Im folgenden Beitrag wird das Malkreuz als Anlass für strukturiertes und produktives Üben und das systematische Durcharbeiten des kleinen Einmaleins vorgestellt. Distributive Strukturen werden entdeckt (s. **Kasten**). Wenn dann in Klasse 3 und 4 im größeren Zahlenraum multipliziert wird, können die Kinder auf das Wissen von Klasse 2 zurückgreifen, es transferieren oder (wieder) entdecken.

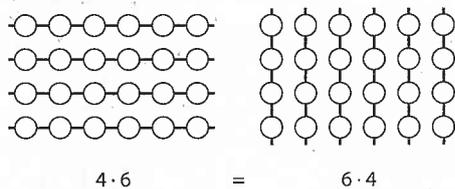
Die Unterrichtseinheit kann durchgeführt werden, sobald die Kinder Malaufgaben mit einem Zahlwinkel am Hunderterfeld legen und deuten können.

Einführung und Erkundung

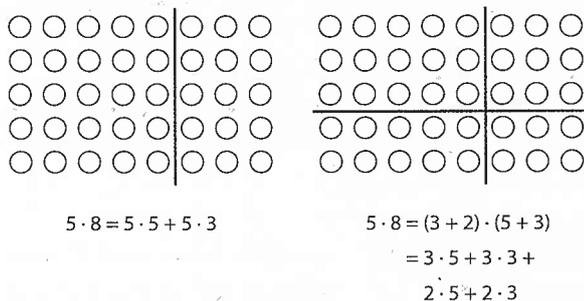
Für die Einführung am Tageslicht-Projektor müssen die

2 Hunderterfelder mit Malkreuzen und Geraden auf Folie kopiert werden. Die Geraden werden abgeschnitten, so-

Punkt- oder Kästchenfelder werden als die mächtigste Darstellungsform von Malaufgaben angesehen. An ihnen ist das Kommutativgesetz leicht ablesbar:



Mit einer oder zwei Geraden lässt sich ein rechteckiges Punktfeld distributiv zerlegen. Die Kinder nutzen dann das Verteilungsgesetz (Distributivgesetz), lange bevor sie es benennen:



Die Zerlegung von Punktfeldern mit Geraden führt direkt zum Malkreuz (unten rechts in Abb. 1). Das Malkreuz kann in Klasse 3 und 4 zur Multiplikation großer Zahlen genutzt werden. Über das Zerlegen von Rechteckfeldern können Kinder Rechenwege bei großen Malaufgaben dann auch selbst entdecken und darstellen (Pöhls 2013).

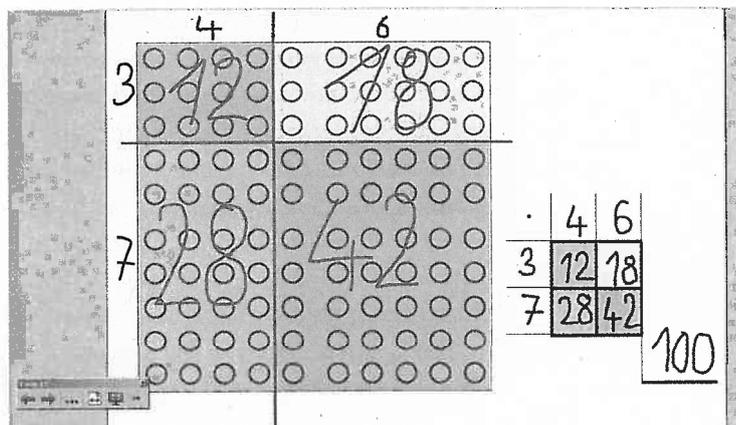
dass sie auf den Hunderterfeldern hin- und hergeschoben werden können. Außerdem braucht man transparente **3** Rechtecke in Rot, Gelb, Grün und Blau. Die Färbungen finden sich in den Zellen der Malkreuze wieder.

Die Geraden werden von der Lehrkraft auf dem Hunderterfeld platziert: „Ich kann das Hunderterfeld durch die beiden Geraden in vier Rechtecke zerlegen. Ein rotes, ein gelbes, ein grünes und ein blaues. Wie viele Punkte sind in jedem Rechteck?“ Wenn die Kinder Anzahlen nennen, werden sie aufgefordert zu erläutern, wie sie auf diese gekommen sind. Einige Kinder greifen dabei auf multiplikative Strukturen zurück: „Es sind drei Reihen mit vier Punkten“ oder „Ich habe drei mal vier gerechnet.“ Anzahlen werden groß in die Punktefelder geschrieben, die Faktoren der zugehörigen Aufgaben an den Rand des Hunderterfeldes (Abb. 1).

Die vollständig ausgefüllte Mal-Tabelle wird gezeigt. „Warum passt die Tabelle?“ Durch diese Frage werden die Schülerinnen und Schüler angeregt, den Wechsel der Darstellungsformen vom Feld zur Tabelle selbst nachzuvollziehen. Die Farbgebung im Feld und in der Tabelle soll die Kinder dabei unterstützen. Zuletzt wird die Sum-

me der vier inneren Tabellenzellen gemeinsam mit den Kindern berechnet und auf den „Haken“ an der Tabelle geschrieben.

Bei Bedarf kann ein zweites Beispiel gemeinsam ausgeführt werden. Benötigte Fachbegriffe für die Zahlen im Malkreuz – „Randzahlen“, „Innenzahlen“ und „Summe“ – werden eingeführt und wiederholt.



1 Vom Hunderterfeld zum Malkreuz.

Verschiedene Zerlegungen finden

In der folgenden Arbeitsphase zerlegen die Kinder das Hunderterfeld selbst und füllen die dazugehörigen Tabellen aus (4 100 zerlegen). Es sollen verschiedene Zerlegungen gefunden und auf dem Arbeitsblatt festgehalten werden. Auf der Suche nach den Zerlegungen müssen diverse Malaufgaben berechnet werden. So wird produktiv geübt (Abb. 2).

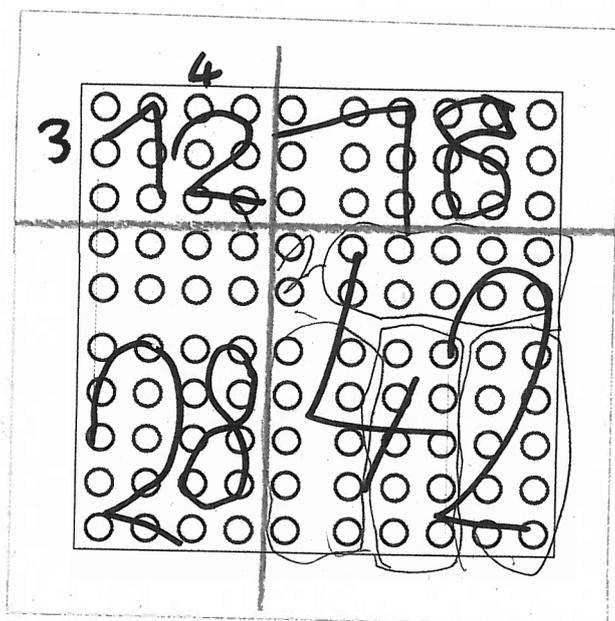
Irgendwann wird sich die Frage stellen, wann zwei Zerlegungen gleich sind. In der Arbeitsphase spielt die Lehrkraft diese Frage noch an die Kinder zurück.

Die Beantwortung der Frage bedarf einer Vereinbarung, die mit der Klasse gemeinsam getroffen werden muss. In der Unterrichtseinheit werden geometrische Darstellungen mit einer arithmetischen Struktur versehen. Dreht man eine zerlegte Hundertertafel, mag man sie zwar als geometrisch gleich beschreiben, dennoch gibt es Argumente, die dafür sprechen, dass die zugehörigen Mal-Tabellen verschieden sind, weil die Aufgaben andere sind. In der Plenumsphase muss darauf geachtet werden, dass alle Sichtweisen von Gleichheit und Verschiedenheit gewürdigt werden. Es ist eine Frage der Perspektive. „Ganz verschieden“ war der Begriff, der in der 2b geprägt wurde, um zwei zerlegte Hunderterfelder zu beschreiben, die nicht durch Drehung oder Spiegelung ineinander überführt werden können. Auf der Ebene des Malkreuzes bedeutet „ganz verschieden“, dass verschiedene Innen- und Randzahlen vorkommen. Zerlegungen, die man durch Drehen und Spiegeln ineinander überführen kann, wurden „fast gleich“ genannt. Auf der arithmetischen Ebene entspricht dem, dass die Innen- oder Randzahlen der Tabellen gleich, aber anders angeordnet sind.

Die Präsentation gefundener Zerlegungen, die Beschreibung der Rechenwege und die Vereinbarung über Gleichheit und Verschiedenheit sind Ziele des Plenums. In der Erprobung wurde von einzelnen Schülerinnen und Schülern noch das Kommutativgesetz an den zerlegten Hunderterfeldern entdeckt und verbalisiert: „Bei dir sind da drei mal vier Reihen. Ich hab' vier mal drei Reihen. Das ist immer zwölf.“

Forscherfragen bearbeiten

Die erste Forscherstunde beginnt mit dem Fokus auf die Malkreuze. „Ich möchte heute mit euch herausfinden, wie viele ‚ganz verschiedene‘ Malkreuze es zum Hunderter-



2 Anna ermittelt das Ergebnis von $7 \cdot 6$ mit Hilfe von Zehnerbündeln. Ihr Rechenweg wird am Punktefeld sichtbar.

feld gibt“, lautet die Einführung. Als Beispiel wird frontal ein Hunderterfeld zerlegt und das zugehörige Malkreuz ausgefüllt (2 Hunderterfelder mit Malkreuzen). Anschließend wird eine Zerlegung mit vertauschten Faktoren vorgenommen. Mit den Kindern wird wiederholt, dass beide Malkreuze ähnlich sind und als gleich gelten. Argumente aus der vorherigen Stunde können reaktiviert werden, um den Arbeitsauftrag und die Verschiedenheit von Zerlegungen zu klären.

Gemeinsam alle Zerlegungen finden

Die Kinder arbeiten in Gruppen. Einige zerlegen Hunderterfelder, indem sie Geraden einzeichnen, wieder andere füllen gleich Malkreuze aus (5 Verschiedene Zerlegungen finden). Diejenigen Kinder, die schon fertig sind, übertragen jede neue Zerlegung in ein Formular (6 Diese Zerlegung haben wir gefunden mit einem großen Malkreuz. Um allzu viele Dopplungen zu vermeiden, werden die großen Malkreuze sichtbar für alle an die Tafel geheftet. Die Lehrkraft darf hier ruhig etwas steuernd eingreifen. „Fast gleiche“ Zerlegungen werden von ihr übereinander geheftet oder von vornherein aussortiert.

Wie viele Zerlegungen gibt es? Für jede Gerade sind neun Positionen möglich (zumindest, wenn Positionierungen am Rand des Feldes ausgeschlossen werden, sonst sind es elf). Das führt zunächst zu $9 \cdot 9 = 81$ Zerlegungen. Dennoch gibt es nur 15 „ganz verschiedene“ Malkreuze. Eine geschickte Sortierung kann helfen. Schlägt die Klasse keine eigenen Sortierkriterien vor, schiebt die Lehrkraft alle Zerlegungen, bei denen eine Randzahl 1 ist, in eine Spalte. Es könnten fünf sein, wenn schon alle ge-

VERSCHIEDENE ZERLEGUNGEN

Seite 3 von 11

3 15 „ganz verschiedene“ Zerlegungen – das Malkreuz verhilft zur nötigen Übersicht.

funden sind. Danach alle übrigen mit 2 als Randzahl – es sind noch vier möglich. Dann bis zu drei mit 3 als Randzahl und zwei mit 4. Es bleibt höchstens noch eine mit 5 übrig (Abb. 3).

Weitere Forscherfragen

Weitere Forscherfragen können beispielsweise sein:

- Kann es andere Zerlegungen mit 1 (2, 3, ...) geben?
- Was passiert, wenn man eine Gerade festhält und die andere verschiebt? Wie verändern sich die Felder? Und wie die dazugehörigen Malkreuze? Wie viele sind davon „ganz verschieden“?
- Zerlege ein $7 \cdot 7$ -Feld ($8 \cdot 7$ -, $8 \cdot 8$ -, $6 \cdot 9$ -Feld). Wie sieht das Malkreuz aus? Wie viele Zerlegungen gibt es?
- Woher weiß man in Malkreuzen mit Lücken, welche Zahl eingetragen werden muss?
- Trage die Zahlen 1, 4, 4, 6, 6, 9, 36, 54, 100 in ein Malkreuz ein. Woher weiß man, wo die Zahlen eingetragen werden müssen?

Mit Forscheraufträgen dieser Art, die die Kinder zum Entdecken von Zusammenhängen und zum Argumentieren auffordern, üben sie gleichzeitig das Einmaleins und lernen das Malkreuz immer besser kennen. Damit erweitern sie ihr Darstellungsrepertoire um eine wichtige Form.

Lernen begleiten

Beobachtungshilfen

- Wer benennt die Malaufgaben richtig?
- Wer kennt Einmaleinsergebnisse auswendig? Wer zählt die Punktmengen aus? Wer addiert schrittweise?
- Wer stellt Bezüge zwischen Punktfeldern und den Einträgen im Malkreuz her?
- Wer verbalisiert Auffälligkeiten bei Strukturen und Gesetzmäßigkeiten?
- Wer unterscheidet gleiche und ähnliche Malkreuze bzw. Zerlegungen?

Förderhinweise

Dieser Sequenz liegt natürliche Differenzierung zu Grunde. Kinder werden zu unterschiedlichen Ergebnissen mit unterschiedlicher Eindringtiefe gelangen. Es ist darauf zu achten, dass jedes Kind das Feld zerlegt und die Aufgaben bestimmt. Einige Kinder werden damit vollkommen ausgelastet sein, während andere systematisieren, sortieren, Strukturen erkennen und zu argumentieren beginnen. Alle Anschauungsmittel und Rechenhilfen, die während der Einführung des kleinen Einmaleins verwendet wurden, sind erlaubt.

Kinder, die sich mit dem zeichnerischen Zerlegen des Hunderterfeldes schwertun, können Foliengeraden erhalten.

Pöhls, A.: Quadrate aus Quadraten. Einstieg in die Multiplikation großer Zahlen mit Eigenproduktionen. In: Grundschule Mathematik 37 (2013), S. 22–25.

Wittmann, E. Ch.; Müller, G.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einpluseins zum Einmaleins. Klett, Stuttgart 1990. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen. Klett, Stuttgart 1992.