

# Quadrate aus Quadraten

## Einstieg in die Multiplikation großer Zahlen mit Eigenproduktionen

Mit Hilfe von Rechteckfeldern entwickeln Schülerinnen und Schüler zunächst individuelle Rechenwege zur Berechnung großer Quadratzahlen. Diese können dann in gemeinsamen Reflexionsphasen zu eleganten und effizienten Rechenwegen für die Multiplikation großer Zahlen ausgebaut werden.

### Zeitbedarf

2 – 3 Unterrichtsstunden.

### Kompetenzen inhaltlich

Halbschriftliche Rechenstrategien entwickeln.  
Verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten.  
Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen.

### Kompetenzen prozessbezogen

Kommunizieren. Argumentieren. Darstellen.

### Zusätzliches Material

Gut geeignet zum Aufzeichnen von Rechteckfeldern sind DIN-A3-Bogen kariertes Papier (Kanzleipapier).

Farbige Pappen für Plakate.

## Materialpaket



- 8 **Quadrate der Längen 11 – 20** aus Einheitsquadraten zum Ausschneiden.
- 9 **Quadratzahlen von 1 – 20**. Tabelle zum Eintragen der Ergebnisse. Am besten beim Kopieren auf DIN-A3-Format vergrößern.
- 10 **So habe ich gerechnet**. Die Kinder erklären ihren Rechenweg.
- 11 **Plakatüberschriften** zum Ausschneiden. Ebenfalls am besten auf DIN-A3-Format vergrößern.
- 12 **Was haben die anderen gemacht?** Die Kinder vergleichen die Rechenwege der anderen Kinder mit ihren eigenen.

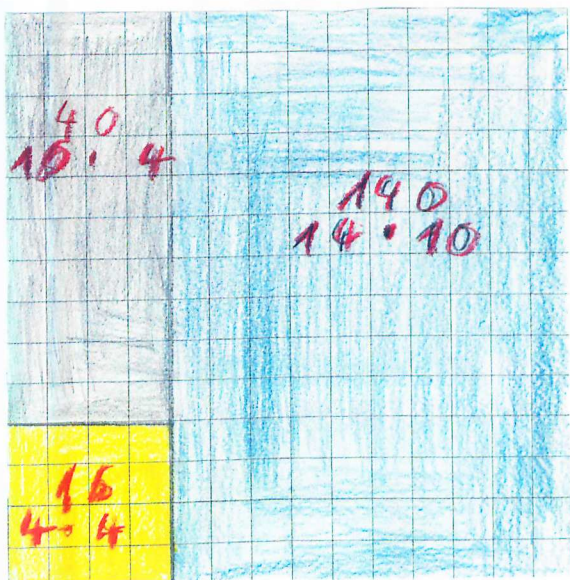
Quadratzahlen bis 100 sind den Kindern in der dritten Klasse bereits bekannt. Ihre Darstellung als quadratische Punktmuster oder als Quadrate aus Einheitsquadraten sind aus Klasse 2 geläufig. In der dritten Klasse können die Schülerinnen und Schüler diese Darstellungsform nun nutzen, um Strategien zur Multiplikation großer Zahlen zu entdecken. Ganz nebenbei erleben sie das enorme Potenzial von mathematischen Darstellungen.

Im Sinne des Ich-Du-Wir-Prinzips ist es wichtig, dass jedes Kind zunächst eigene Wege beschreitet, dass die Kinder anschließend aber immer wieder angeregt werden, über ihre Eigenproduktionen zu reflektieren.

## Die Einführung

Die Lehrkraft zeichnet zunächst auf die Rechenkästchen-seite der Tafel ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 und eines mit der Seitenlänge 3. „Diese Quadrate sollen Quadrat der Länge 2 und Quadrat der Länge 3 genannt werden.“ „Warum nennt man diese Quadrate so?“ „Aus wie vielen kleinen Quadraten bestehen diese Quadrate?“ „Quadrate der Länge 3 aus 9 kleinen Quadraten“ wird notiert. Die Lehrkraft gibt den Kindern bekannt, dass sie in der anstehenden Unterrichtssequenz große Quadratzahlen ermitteln sollen. Das Ziel für die erste Arbeitsphase ist die gruppenweise Fertigstellung eines Plakats, aus dem Wege zur Bestimmung von Quadratzahlen deutlich werden.

Anschließend teilt die Lehrkraft die Klasse in (leistungshomogene) Kleingruppen ein. Der Arbeitsauftrag lautet: Aus wie vielen kleinen Quadraten bestehen die Quadrate der Länge 11 bis 20? Jede Gruppe erhält kariertes Kanzlei-



1 Lukas und Jonas zerlegen das Quadrat der Länge 14 schrittweise in Rechtecke der Länge 10.

papier oder andere große karierte Blätter. Die Kinder sollen sich die Arbeit aufteilen und sich anschließend ihre Ideen erklären können. Dafür sei es wichtig, dass man in den Zeichnungen die Ideen gut erkennen könne.

### Die Gruppen ermitteln große Quadratzahlen

Alle Kinder zeichnen große Quadrate und teilen diese in überschaubare Teile auf. Einige schreiben selbstständig die Anzahlen der Quadrate oder passende Rechenterme in die Teilstücke. Die Lehrkraft ermutigt auch die anderen Kinder, dies zu tun. Kinder, die keine passenden Rechenterme finden, können gefragt werden, wie man die Anzahl (noch) ermitteln könne.

Sind in einer Kleingruppe alle Quadratzahlen berechnet, stellen sich die Kinder ihre Ideen und ihre Vorgehensweisen in einer ersten Reflexionsphase vor. Dabei entdecken die Kinder Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei den Herangehensweisen. Die Lehrkraft regt die Kinder an, die Quadratzahlen eines anderen Kindes mit ihrer Strategie zu überprüfen. Sie fordert sie auf, ihre Herangehensweise zu beschreiben. Freiwillige dürfen auch noch größere Quadratzahlen berechnen.

### Jede Gruppe fertigt ein Plakat an

Die Schülerinnen und Schüler erhalten gruppenweise eine große, farbige Pappe, einen Satz **8 Quadrate der Längen 11–20** aus Einheitsquadraten, die Tabelle **9 Quadratzahlen von 1–20**, genügend Blätter **10 So**

habe ich gerechnet und eine **11 Plakatüberschrift** zum Aufkleben. Klebestifte, Scheren und Buntstifte liegen bereit. Wichtig ist es, den Kindern zu vermitteln, dass die Gruppen auf dem Plakat *verschiedene Ideen verständlich* darstellen sollen.

### Präsentieren und wiederholt reflektieren

Anschließend werden die Plakate präsentiert. Die Kleingruppen schauen sich gemeinsam die anderen Plakate an. Sie erhalten das Arbeitsblatt **12 Was haben die anderen gemacht?** mit Fragen, die sie in der zweiten Reflexionsphase diskutieren sollen: Welche Ideen sind gleich? Welche Ideen sehen so ähnlich aus wie eure Ideen? Welche Ideen sind neu? Welche Ideen möchtet ihr nochmal erklärt bekommen?

Im abschließenden Halbkreis vor den Plakaten, der dritten Reflexionsphase, werden die wichtigsten Ideen im Klassenverband besprochen, beschrieben und auch benannt.

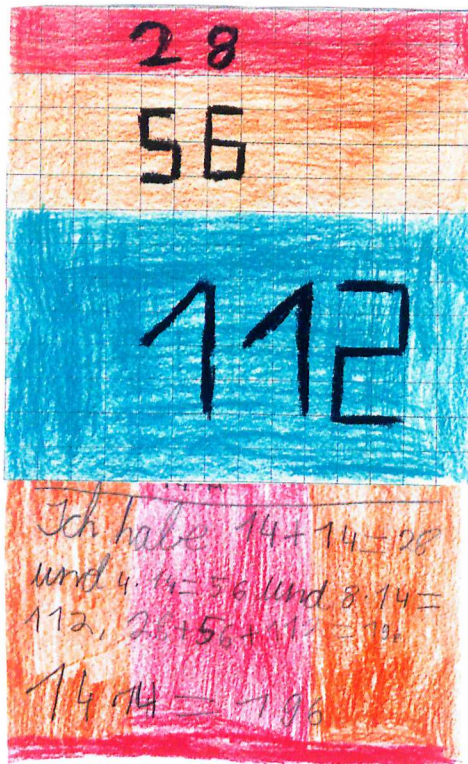
### Die Rechenwege der Kinder

Es folgt ein Überblick über die wichtigsten Ideen in der Klasse des Autors, jeweils mit einer Skizze, wie diese im Lernprozess des Multiplizierens genutzt werden können:

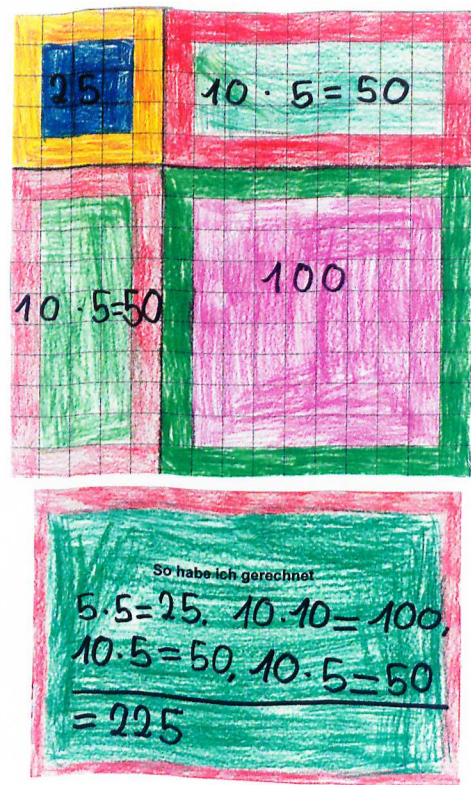
#### „Immer zehn Reihen – schrittweise“

Diese Strategie kann spalten- oder zeilenweise umgesetzt werden: Das Quadrat wird zunächst in zwei Rechtecke zerlegt, von denen eines zehn Reihen breit bzw. hoch ist. Das Quadrat der Länge 14 beispielsweise wird in ein Rechteck mit  $14 \cdot 10$  und ein Rechteck mit  $14 \cdot 4$  Quadraten aufgeteilt. Um die Quadratanzahl des größeren Rechtecks zu bestimmen, konnten einige Kinder ihr Vorwissen zur Multiplikation von Zehnerzahlen nutzen. Die Kinder entdeckten so die Regelmäßigkeit der Multiplikation mit 10 wieder. Das kleinere Rechteck bearbeiteten einige Kinder additiv:  $4 + 4 + 4 + \dots$ . Andere zerlegten das kleinere Rechteck weiter in ein Zehner-Rechteck ( $10 \cdot 4$ ) und ein kleines Quadrat ( $4 \cdot 4$ ; Abb. 1) – die zugehörigen Einmal-aufgaben waren für die Kinder leicht zu berechnen.

Dieser Strategie liegt das Distributivgesetz zu Grunde:  $14 \cdot 14 = 14 \cdot (10 + 4) = 14 \cdot 10 + 14 \cdot 4$ . Wichtig ist hier, dass diese Hauptstrategie des halbschriftlichen Multiplizierens nicht als Rechenregel der Klasse vorgegeben wird, sondern von den Schülerinnen und Schülern aus der Darstellung heraus entwickelt wird. Die meist zwei-



2 Fortlaufendes Verdoppeln als Strategie.



3 Aus Melindas Zerlegung des Quadratfeldes lässt sich später leicht das Malkreuz ableiten.

farbige Darstellung ist für Kinder eine mächtige Argumentationshilfe, wenn es darum geht zu begründen, warum diese Zerlegung eines Faktors erlaubt ist. Wenn die Plakate auch im vierten Schuljahr noch im Klassenraum hängen, können sich die Kinder auch bei großen Multiplikationsaufgaben immer wieder darauf beziehen.

Leo und Tim wollten unbedingt das größtmögliche Quadrat berechnen, das man auf Kanzleipapier zeichnen kann:  $58 \cdot 58$ . Mit der Strategie „Immer zehner-schrittweise“ gelang ihnen die Berechnung des Produkts lange vor der Behandlung der Aufgabe im Unterricht.

#### „Immer verdoppeln“

Felix' Zeichnung (Abb. 2) zeigt, dass er zwei Zeilen, vier Zeilen und zuletzt noch acht Zeilen von seinem Quadrat abgetrennt hat. Damit kann er die Quadratzahl zu 14 durch Verdopplungen ermitteln:  $2 \cdot 14 + 2 \cdot (2 \cdot 14) + 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 14))$ .

Während der Diskussion der Ideen wurde Felix' Beitrag bestaunt. Gleichzeitig vermuteten aber einige Kinder, dass die Idee nur bei manchen Aufgaben funktioniert. Felix bekräftigte die Annahme – er hatte die anderen Quadratzahlen auch anders berechnet.

Tatsächlich kann man jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen schreiben, so wie es Felix mit der 14 gemacht hat:  $14 = 8 + 4 + 2$ . In einer nachfolgenden Unterrichtsstunde wurde die Klasse deshalb angeleitet, die vermutete Einschränkung zu überprüfen. Es wurde keine Quadratzahl entdeckt, die nicht über fortlaufendes Ver-

doppeln errechnet werden kann – und während der Erforschung wurde nebenher intensiv das Verdoppeln und das Addieren geübt.

#### „Erst hundert“ (Malkreuz)

Viele Kinder trennen zunächst ein Hunderterquadrat ab. Den Rest zerlegen sie erneut in zwei Rechtecke und ein Quadrat (Abb. 3).

Wer so vorgeht, kann leicht Regelmäßigkeiten erkennen. Neben dem Hunderterquadrat erhält man immer zwei gleiche Rechtecke und ein kleines Quadrat. Arian berechnete, nachdem er nur zwei Zeichnungen gemacht hatte, alle Quadratzahlen zwischen 11 und 20 nach dem gleichen Schema:

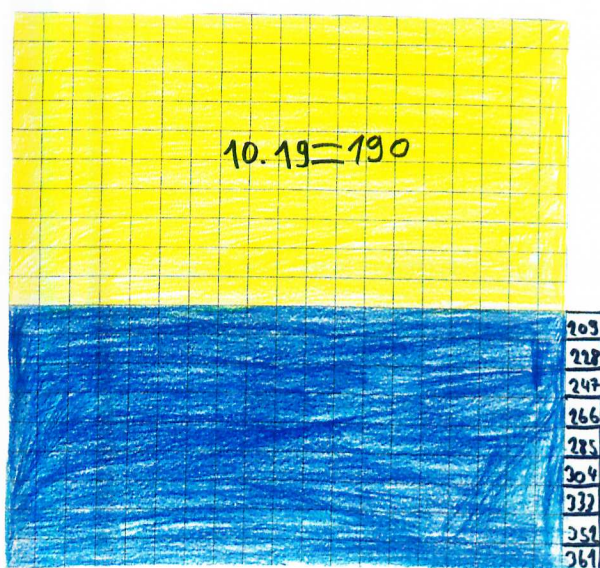
$$\begin{aligned} 100 + 10 + 10 + 1 \\ 100 + 20 + 20 + 4 \\ 100 + 30 + 30 + 9 \dots \end{aligned}$$

Aus dieser Zerlegung des Quadratfeldes kann leicht das Malkreuz als wichtiges Instrument für das halbschriftliche Multiplizieren hergeleitet werden. Die Felder der Malkreuze können entsprechend den Färbungen der Eigenproduktion gefärbt werden.

In der Mittelstufe wird eine solche Darstellung genutzt werden, um die erste binomische Formel zu veranschaulichen.

#### „Reihenweise“

Einige Kinder arbeiten zeilen- oder spaltenweise und addieren immer wieder denselben Summanden (Abb. 4).



4 Niklas hat erst die Anzahl der Kästchen für ein Feld der Länge 10 ermittelt und dann reihenweise aufaddiert.

Ellaha erkannte den Zusammenhang zur Multiplikation: „Das sind immer die Malaufgaben.“ Das Vorgehen ist nicht als Rückschritt zu verstehen. Es ist durchaus sinnvoll herauszuarbeiten, dass Grundvorstellungen der Multiplikation auch im größeren Zahlenraum Bestand haben.

Vielen Kindern war das reihenweise Vorgehen schnell zu umständlich. Selbstständig fassten sie mehrere Additionen zusammen. Nach und nach werden diese Kinder an die Strategien „Immer verdoppeln“ und „Immer zehn Reihen – schrittweise“ herangeführt.

#### „Was kommt dazu?“

Einige Kinder ermitteln die Anzahl der kleinen Quadrate aus dem Vorgängerquadrat. Muster werden erkannt: „Es kommt immer eine ungerade Zahl dazu“ oder „Es kommt immer die Seite zweimal dazu und dann noch einer.“

Diese Idee kann genutzt werden, um den Blick für Muster und Strukturen zu schärfen. Sie ist allerdings für das Multiplizieren weitaus weniger gut zu verallgemeinern als andere Strategien.

#### Ausblick

Das Entwickeln eigener Darstellungen und Strategien zum Multiplizieren lohnt sich, um Vorstellungen herauszubilden. Die Darstellungen können im Unterricht immer wieder Bezugspunkt sein. An weiteren großen Rechtecken werden die Vorstellungen verfestigt. Gerade die Strategie

### Lernen begleiten

#### Beobachtungshilfen

- Wer zerlegt geschickt?
- Wer schreibt zu den Zerlegungen passende Rechenterme?
- Wer findet für seine Ideen eine hilfreiche Darstellung?
- Wer kann seine Idee oder die Ideen anderer Kinder auf weitere Quadrate (oder Rechtecke) übertragen?
- Wer beschreibt seine Idee verständlich? Wer kann auch Ideen anderer Kinder beschreiben?
- Wer entdeckt Gesetzmäßigkeiten?

#### Förderhinweise

Kinder, die die Quadrate nicht geschickt zerlegen, erinnern sich möglicherweise nicht an den Zusammenhang von Multiplikation und Rechteckfeldern. Die Kinder können zunächst Quadrate zum kleinen Einmaleins bearbeiten und daran erkennen, dass zu jeder Quadratzahl eine Malaufgabe gehört. Später kann man die Kinder auffordern: „Mach aus der großen Malaufgabe leichte Malaufgaben.“ Damit ist die Multiplikation als Operation schon vorgegeben, dem Kind bleibt aber noch Freiraum für eigene Vorgehensweisen. Im Einzelfall kann es auch sinnvoll sein, ein Quadrat der Länge 10 im großen Quadrat schon einzuzichnen.

Kinder, die sehr lange „reihenweise“ arbeiten, werden auf die Strategie „Immer zehn Reihen“ hingewiesen. Gegebenenfalls muss auf das Verzehnfachen nochmal eingegangen werden (vgl. „Ein hoher Turm braucht ein solides Fundament“ auf S. 6).

Kinder, die Schwierigkeiten haben, die Strategie „Erst hundert“ anzuwenden, können eine Folie mit einem passenden rechtwinkligen Kreuz erhalten.

gien „Immer zehn Reihen – schrittweise“ und „Erst hundert“ (Malkreuz) sind auch beim Kopfrechnen hilfreich.

Zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieses Aufsatzes liegt die Unterrichtssequenz ein Dreivierteljahr zurück und gerade letzte Woche stand die Gleichung  $43 \cdot 56 = 2018$  im Raum. Es war ein Leichtes, die Plakate vom Schrank zu holen und den Irrtum durch die Kinder aufklären zu lassen.