Arne Pöhls

Üben in Strukturen

Festigen, vertiefen und vernetzen durch Entdeckungen

Wenn das zu übenden Aufgabenmaterial aus einer mathematischen Struktur entspringt, sind Übungsphasen mehr als reine Wiederholungsphasen. Gelenkte Entdeckungen in einer strukturierten Übung ermöglichen Vernetzungen und Vertiefungen.

Was ist Üben?

„Von Übung sprechen wir in der Regel, wenn ein Satz an Wissenselementen oder eine Fertigkeit anhand einer größeren Zahl gleichartiger Aufgaben geübt wird." (Wittmann 1992)

Immer, wenn eine Unterrichtssituation ein Kind also dazu bringt, wiederholt ein Wissenselement (wie das Ergebnis einer Einmaleinsaufgabe) oder eine Fertigkeit (wie eine Addition im Hunderterraum) auszuführen, sprechen wir von einer Übungssituation. Zu einer Übungssituation gehört ein „Pool von Aufgaben", der geübt werden soll. Dazu gehört ein „Aufgabengenerator", der konkrete Aufgaben zur Verfügung stellt. Das könnte ein Lernheft sein, ein Zufallsgenerator oder eine Lernsoftware. Der Kind bearbeitet die Aufgaben und es wird das Ziel der Geläufigkeit verfolgt. „Übung macht den Meister."

Heute weiß man, dass das Abrufen von Wissenselementen oder das Beherrschen einer Fertigkeit noch nicht dazu führt, dass man „meisterlich" in der Mathematik ist. Außerdem herrscht die Überzeugung, dass das Beherrschen einer Fertigkeit nicht allein durch deren häufige Ausführung erlernt werden kann. Es stellt sich also die Frage, wie Übung stattfinden soll.

Zeitgemäße Ansätze zum Üben, setzen die Aufgaben aus dem „Aufgabenpool" in einen Sinnzusammenhang. Der Sinnzusammenhang verbindet die Aufgaben und setzt sie in Beziehungen zueinander. Gleichzeitig wird in der Bearbeitung des Zusammenhangs Übung erfolgen. Das Ziel einer Übungsstunde ist dann nicht „Wir üben", sondern quasi: „Wir behandeln ein (hoffentlich) spannendes Thema und nebenbei üben wir auch." Dabei wird das Üben in einer übergeordneten Frage- oder Problemstellung eingebettet.

Wenn das Üben einer übergeordneten Frage- und Problemstellung entspringt, gibt es einen signifikanten Unterschied: Die Verbindung der Aufgaben selbst ist mathematisch und nicht sachfremd. Darüber hinaus sind die elementarmathematischen Entdeckungen, die in solchen Übungsphasen errungen werden können, hochgradig motivierend für Kinder.

Produktive Übungen

Der Aufgabengenerator beim produktiven Üben (vgl. Kasten, S. 33) ist eine mathematische Struktur. Da alle Aufgaben aus der gleichen Struktur heraus generiert werden, sind sie in einem ganzheitlichen Zusammenhang vernetzt. Durch die Strukturierung wird zum einen kleinschrittiges Üben sowie die Stufung und Isolierung von Schwierigkeiten vermieden. Zum anderen ermöglicht sie aber auch eine Vernetzung. Diese Vernetzung zeigt sich auf zwei Ebenen. Zum einen besteht die Möglichkeit, Erkenntnisse über Gesetze und Sätze der jeweiligen Operation (wieder) zu gewinnen oder nachzubilden. Es wird an den Beziehungen zwischen einzelnen Aufgaben gearbeitet. Immer wieder entstehen in solchen Übungssituationen analoge Aufgaben, Nachbaraufgaben, Tauschaufgaben … Diese verwandten Aufgaben entstehen oft, nachdem sie bereits im Unterricht thematisiert worden sind. Für die Lehrkraft bietet sich die Möglichkeit, die Beziehung zwischen den Aufgaben aufzugreifen. Durch die Winter'sche Auffassung „Üben ist […] im Wesentlichen die Aufnahme eines Lernprozesses, das Nochmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen" (Winter 1984) wird dieses Konzept verdeutlicht.

Die zweite Ebene der Vernetzung betrifft die Verknüpfung mit der aufgabengenerierenden Struktur. Beim Üben in Strukturen stellt sich automatisch eine Verbindung zwischen dem Übungsstoff und weiteren Kom-

PRODUKTIVES ÜBEN

Mit dem Begriff des Produktiven Übens unterstreicht Winter (1984), dass sich die Übung während der Herstellung eines mathematischen Produkts vollzieht. Dies können Zahlen, Zeichen, geometrische Figuren, Abbildungen, Gleichungen oder Terme sein. Die Handlungen zur Herstellung dieser Produkte engt Winter auf vier wichtige Grundtypen ein: Rekursion, Iteration, Kombination und Umstrukturierung.

In der Vor-Algebraischen Welt der Grundschule spielen die o.g. Terme und Gleichungen noch eine untergeordnete Rolle und werden meist noch nicht als das wahrgenommen, was sie später einmal werden. Das lässt Terme und Gleichungen dennoch für den Grundschulunterricht nicht irrelevant werden. In der Grundschule treten sie in Form von Aufgabenformaten auf. Eine dreistöckige Zahlenmauer bildet drei (natürliche Zahlen) auf eine dritte ab.

Die Abbildungsvorschrift ist in Form von algebraischen Gleichungen beschreibbar. Die geometrische Anordnung der Felder und die genannte Rechenvorschrift ersetzen die Gleichung.

„Berechne viele Zahlenmauern und klebe sie auf ein schönes Plakat" ist keine produktive Übung sondern eine aktionistische Handlung. „Berechne alle Aufgaben auf dem Arbeitsblatt" erzeugt als Produkt ein volles Arbeitsblatt, aber kein mathematisches Produkt.

„Finde möglichst viele/alle Zahlenmauern mit Deckstein 10!" Oder: „Finde alle Zahlenmauern durch Vertauschen der Basissteine 2, 3 und 4" sind Aufgabenstellungen, die zu mathematischen Produkten führen.

Die folgende Tabelle zeigt eine entsprechende Klassifizierung von produktiven Übungen nach Wittmann, inklusive passender Beipiele.

Klassifizierung nach Wittmann:

Struktur / Darstellungsform	problemstrukturiert	operativ strukturiert	sachstrukturiert
gestützt	„Triff die 999!" (s. u.)	Zahlenmuster verändern (vgl. S. 8)	Einkauf mit Rechengeld
formal	mit Buchstabensummen z. B. 170 erreichen (vgl. S. 12)	bei Buchstabensummen Schablone verschieben (S. 12)	Nachkommen von Tieren

petenzbereichen dar. Dies ist meistens der Kompetenzbereich „Muster und Strukturen", häufig auch „Problemlösen" und „Argumentieren". Nicht selten sind auch kombinatorische Aspekte enthalten.

Diese Vernetzung ist nicht nur auf pragmatischer Perspektive effizient. Wenn es gelingt, verschiedene Bereiche des Mathematikunterrichts zu verbinden, ohne dass Teile leiden, ist das eine effektive Unterrichtsvorbereitung. Die Bildungsstandards weisen „Muster und Strukturen" oder „Problemlösen" als zu unterrichtende Bereiche aus. Wer nicht in Strukturen übt und wer nicht problemorientiert übt, der muss zusätzliche Unterrichtszeit für Problemlösen und Muster zur Verfügung stellen. Darüber hinaus führen diese Vernetzungen sowohl zu vertieften Erkenntnissen über die zu untersuchende Struktur als auch über den Übungsstoff.

Eines der großen Missverständnisse von produktiven Übungen ist die Fehlannahme, dass Muster und Strukturen lediglich den Differenzierungsspielraum für die vermeintlich „starken Kinder" darstellen. Richtig ist, dass produktive Übungen stets in weiten Teilen selbstdifferenzierend sind. Kinder, die keinen Übungsbedarf haben, erforschen die zugrundeliegende Struktur, während andere Kinder vorranging Üben. Der Umkehrschluss, dass vermeintlich schwache Kinder in solchen Situationen lediglich Üben sollen, gilt aber nicht. Im Gegenteil: Gerade Kindern, die Schwierigkeiten beim Nutzen von Mustern und Strukturen haben, sollten strukturierte Übungen zentraler Bestandteil sein. Wie lernen sie sonst, sich in Mustern und Strukturen, die beim Rechnen und in allen Teilen der Mathematik fundamental wichtig sind, zurechtzufinden? „Unstrukturierte Übungen' stellen enorme Anforderungen an das Gedächtnis, und gerade hier finden sich häufig Schwächen" bei lernschwachen Kindern. Erst „Strukturierte Übungen ermöglichen Rückgriff auf vorhandenes Wissen" und entlasten dadurch das Arbeitsgedächtnis." (vgl. Scherer 2009)

Produktive Aufgaben sind selbstdifferenzierend

Die Schülerlösung von May (Abb. 1) illustriert einen Vorteil des produktiven Übens am Beispiel von „Triff die 999!" (siehe Kasten). May beherrscht die schriftliche Addition seit Kurzem. Ihr unterlaufen seit dieser Stunde keine Fehler mehr. Um Geläufigkeit zu erzeugen und dem Vergessen entgegen zu wirken, sind eine Vielzahl von Wiederholungen notwendig. May hat eine spannende Aufgabe – ein herausforderndes Problem – und übt nebenher. Beim fünften Versuch landet sie einen Treffer. Jetzt vertauscht sie lediglich die Ziffern spaltenweise und füllt so das gesamte Blatt weit über den Ausschnitt der Abbildung hinaus. Es konnte beobachtet werden, wie sie Ziffern tauscht, das Ergebnis darunter schreibt und dann die Überträge ergänzt. Übt sie noch? Ist das Format für sie nicht jetzt eine Rechenvermeidungsbeschäftigung? Sicherlich übt sie nicht mehr das Ausführen des Algorithmus, aber sie kann spal-

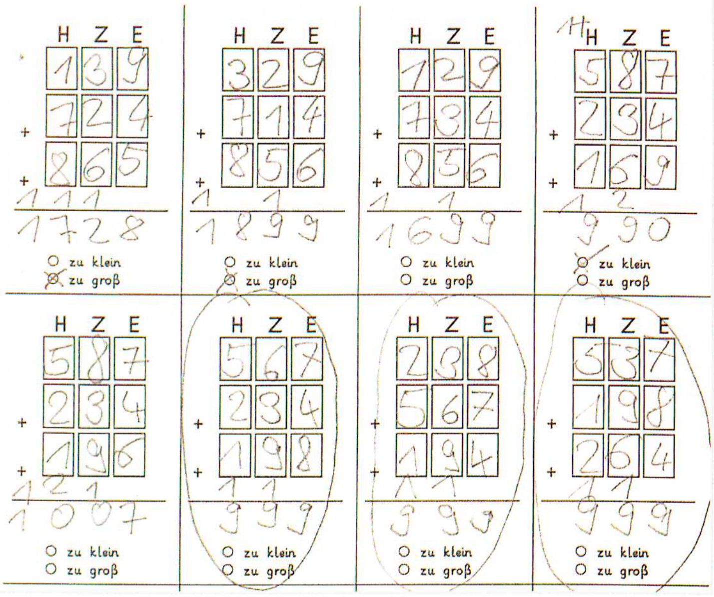

Abb. 1: May „schleicht sich an" und tauscht dann Ziffern spaltenweise.

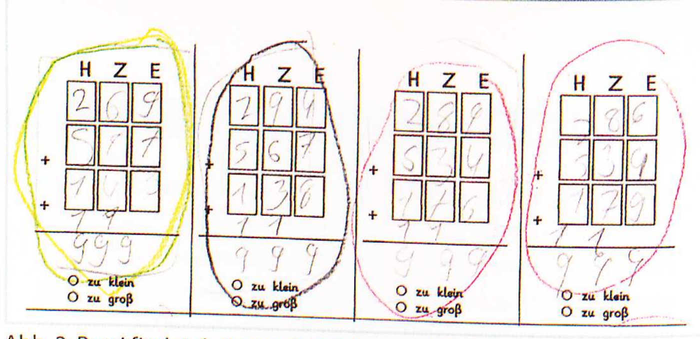

Abb. 2: Rami findet drei grundsätzlich verschiedene Lösungen und markiert sie mit verschieden Farben

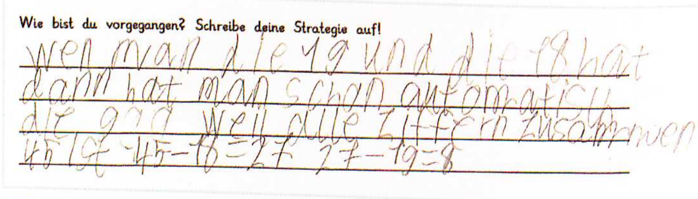

Abb. 3: Rami bildet die Gesamtsumme aller Ziffern (45) und verteilt sie über die Stellenwerte

tenweise tauschen, weil sie die Struktur des Algorithmus verstanden hat. Zahlen stellenweise zu betrachten ist der Kern der schriftlichen Addition. May vertieft sich also inhaltlich. Sie kann aufgefordert werden, ihre Erkenntnis zu formulieren und danach weitere grundsätzlich verschiedene Aufgaben zu finden.

Rami (Abb. 2, 3) geht strategisch vor, tauscht Ziffern systematisch und formuliert spannende Entdeckungen, während andere Kinder noch die Chance zum Üben haben.

Der Entdeckungsspielraum, den Rami und May in den Kompetenzbereichen „Problemlösen", „Argumentieren" sowie „Muster und Strukturen" ausschöpfen, vertieft also die Kenntnis über die auszuführende Operation. Das bedeutet, dass die Kinder sich nicht entscheiden, ob sie sich mit dem zu übenden Thema oder der Struktur beschäftigen. Die Struktur ermöglicht eine Vertiefung des zu übenden Themas und das zu übende Thema führt in die Struktur. Ein solches Übungskonzept stellt das Verhältnis zwischen Übungsphasen und Erkundungsphasen in ein anderes Verhältnis, das Winter (1984) so beschreibt, dass „entdeckend geübt und übend entdeckt" wird.

Klassifikation strukturierter Übungen

Die Aufgaben beim produktiven Üben entstammen nicht nur aus einer Struktur. Man kann analysieren, welcher Art die Strukturierung ist. In Anlehnung an die Prinzipien des Übens nach Winter (1984) erweitert Wittman (1992) zu einem Klassifikationssystem von Übungsformen.

Aufgaben wie „Triff die 999!" bieten Kindern eine Problemstellung. Wittmann spricht dabei von „problemstrukturierten Übungen."

EIN BEISPIEL FÜR PRODUKTIVES ÜBEN

„Triff die 999!"

[Variante der Aufgabenstellung ‚Triff die 1000!' von Scherer in diesem Heft]

Aufgabe:

Die Kinder sollen mit den 9 Ziffernkarten von 1 – 9 drei 3-stellige Zahlen legen, deren Summe möglichst 999 beträgt.

Die Anzahl möglicher Aufgaben, die man mit 9 verschiedenen Ziffern legen kann, beträgt 362 880. Übungsspielraum ist also reichlich geboten.

Entdeckungshorizont:

Es gibt 1080 passender Aufgaben. Obwohl die Anzahl groß ist, bleibt es unwahrscheinlich, dass durch reinen Zufall eine passende Aufgabe gefunden wird.

Es gibt Kinder, die sich der 999 „anschleichen", indem sie bei einer zu hohen oder zu niedrigen Aufgabe gezielt Ziffern tauschen. Andere Kinder systematisieren und versuchen bei den Einer-Ziffern stets 19, bei den Zehnern stets 18 und bei den Hundertern stets 8 zu erreichen. Hat man eine Aufgabe kann man spaltenweise durchtauschen. Geschickte Tauschmöglichkeiten gehen auch zeilenweise, wenn passende Paare getauscht werden.

Produkt:

Drei 3-stellige Zahlen aus insgesamt 9 Ziffern, deren Summe 999 ergibt.

Methodisches:

Ein Aufgabenblatt (vgl. Abb. 1) ermöglicht die Dokumentation der Versuche. Die Kinder markieren bei ihren Fehlversuchen, ob das Ergebnis zu hoch oder zu niedrig ist.

Dies soll alle richtig gerechneten Aufgaben würdigen und überflüssiges Radieren verhindern.

Ein Nachteil des Blattes ist, dass es die Kinder zum „anschleichen" ermuntert und andere systematische Vorgehensweise vernachlässigt.

Ein Problem liegt dann vor, wenn der Weg der Transformation vom Ausgangs- zum gewünschten Endzustand einer Aufgabe unbekannt ist oder es momentan unüberwindbare Hürden in der Transformation gibt.

Bei problemstrukturierten Übungen dient die zu übende Fertigkeit dem Lösen eines Problems.

Die Art der Strukturierung kann auch operativ- oder sachstrukturiert sein. Operativ strukturierten Übungen ist gemein, dass die Kinder aufgefordert werden, zu beobachten, zu beschreiben und zu begründen, wie sich eine bestimmte Operation auf ein mathematisches Objekt auswirkt. Winter (1984) fordert „Gleichartige Übungsaufgaben sollten im Sinne des operativen Prinzips als systematische Variation der Daten erzeugt werden, um dadurch Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und somit Kenntnisgewinn zu erzielen". Beispiele für operativ strukturierte Übungen sind die bekannten „Entdecker-Päckchen" oder auch „Schöne Päckchen." Auf eine Ausgangsaufgabe wirkt eine Rechenoperation und die Kinder beobachten, wie sie sich auswirkt.

Bei sachstrukturierten Übungen erwachsen aus einer mathematisch interessanten Sachsituation eine Reihe verwandter Aufgaben. Ein bekanntes Beispiel für das sachstrukturierte Üben der Multiplikation von Wittmann/Müller (1990) ist die Nachkommenschaft von Tieren pro Jahr. Die Anzahl der Würfe pro Jahr multipliziert mit der Anzahl der Jungen pro Wurf ergibt jeweils die Nachkommen pro Jahr.

(*Hinweis:* Zu sachstrukturierten Übungen erscheint 2018 ein eigenes Heft bei „Grundschule Mathematik".)

Weiter unterscheidet Wittmann (ebd.) in Übungen, die rein formal stattfinden und Übungen, die gestützt sind. Gestützte Übungen verwenden bei der Bearbeitung des Problems oder der Durchführung der Operation Material oder bildliche Darstellungen. Formale Übungen finden auf der symbolischen Ebene statt.

Rolle der Lehrkraft

Im aktiv-entdeckenden Unterricht, und somit beim produktiven Üben, ist es nicht die primäre Aufgabe der Lehrkraft, Wissen zu vermitteln, sondern Situationen zu schaffen, in denen Kinder eigenständig und durch gelenkte Entdeckungen neue Erkenntnisse erlangen. Dabei benötigen die Kinder Unterstützung. „Entdeckend üben will gelernt sein" (Verboom 2004).

In der Bearbeitung eines produktiven Lerngegenstands werden sich sowohl die Aktivitäten als auch der Lernzuwachs der einzelnen Kinder unterscheiden. Damit umzugehen, erfordert von der Lehrkraft besondere Befähigungen, wie Krauthausen/Scherer (2010) zusammentragen. Die Unterrichtsvorbereitung muss sich ändern. Die Lehrkraft muss den Entdeckungsspielraum selbst erschließen, um fachliche Souveränität zu gewährleisten. Sie muss in der Lage sein, durch Frage- und Impulstechniken Kinder tiefer in die Struktur zu führen.

Solche Fragen an Formate, die zu Fragen an Kinder werden können, hat Leuders (2009) zusammengestellt (vgl. Kasten „Fragen an Formate").

Literatur

Krauthausen, G., Scherer, P. (2010): Umgang mit Heterogenität – Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Kiel: IPN-Materialien

Leuders, T. (2009): Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker & H.-G. Weigand (Eds.), Mathemagische Momente. Berlin: Cornelsen

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren. H. 2, 4 – 11.

Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Stuttgart: Klett

Verboom, L. (2004): Entdeckend üben will gelernt werden! In: Die Grundschulzeitschrift 177, S. 6 – 11.

FRAGEN AN FORMATE

Bei problemstrukturierten Übungsformen:

- Operatives Durcharbeiten von Umkehraufgaben/Aufgaben mit Parametern
  - *Umkehrfrage:* Wann kommt … heraus?
  - *Optimierung:* Wann ist … am größten/kleinsten/besten?
  - *Funktionale Abhängigkeit:* Was passiert, wenn …?
  - *Kombinatorische Ausschöpfung:* Wie viele Möglichkeiten gibt es …? Wie lauten alle Möglichkeiten …?
- Spielerisches Auseinandersetzen mit Spielsituationen
  - *Übungsspiel:* Spielt miteinander.
  - *Spielanalyse:* Findet eine gute Strategie.
- Eigene Aufgaben erarbeiten mit Musteraufgaben
  - *Variieren:* Verändere die Aufgaben (Welche kannst du noch ebenso bearbeiten, welche nicht? Warum?)

Bei strukturorientierten Übungen:

- Muster erkennen und erzeugen in strukturierten Aufgabenserien
  - *Muster suchen:* Welche Muster kannst du entdecken?
  - *Muster fortsetzen:* Wie lässt sich das Muster fortsetzen?
  - *Analogisieren:* Wie lauten ähnliche Aufgaben? (Warum sind sie ähnlich?)
- Strukturieren von unstrukturierten Aufgabengruppen
  - *Sortieren / Klassifizieren:* Bilde Gruppen … je nach Lösbarkeit/ Typ/…
  - *Passung prüfen:* Welches Beispiel passt nicht? Warum?
  - *Bewerten:* Suche die schwierigsten/leichtesten/ungewöhnlichen heraus.
- Argumentieren an gestellten/gelösten Aufgaben
  - *Muster begründen:* Wieso kommt dieses Muster heraus?
  - *Darstellen:* Wie kann man die Situation anders darstellen? (grafisch, rechnerisch …)
  - *Richtigkeit/Gültigkeit:* Welche Aufgabe ist unmöglich/sinnvoll? Stimmt die Behauptung? Warum?
  - *Fehler finden:* Was ist hier falsch? Warum? Wie kann man es besser machen?