Raum und Form produktiv mit der Schattenbox

arne.poehls@uni-hamburg.de

Ziele heute:

Schattenbox und unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten kennen lernen

- Roter Faden:

1. Mathematischer Hintergrund
   - Arbeitsphase: Kennen-Lernen der Schattenbox
2. Produktives Üben mit der Schattenbox
3. Schattenbox im Unterrichtsverlauf
   - Arbeitsphase: Erkundung der Einer Karten
   - Arbeitsphase: Erkundung der Kartei
4. Problemlösen mit der Schattenbox
   - Arbeitsphase: Problemlösen
   - Arbeitsphase: Vom Bauplan zur Schattenkarte
5. Schattenbox und SOMA-Teile
   - Arbeitsphase: Aufgabendesign
- Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen

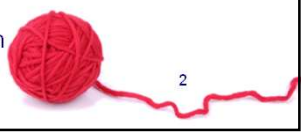


Foto: Tim Reckmann

Mathematischer Hintergrund: Primäres Ziel des Geometrie-Unterrichts der GS

Räumliches Vorstellungsvermögen

ist die Fähigkeit, räumliche Objekte…

- verinnerlicht zu sehen,
- verinnerlicht bewegen,
- verinnerlicht zerlegen und zusammensetzen
- und verinnerlicht ausdehnen und komprimieren

…zu können.

Wollring 2015 in Anlehnung an Piaget

Mathematischer Hintergrund: Primäres Ziel des Geometrie-Unterrichts der GS

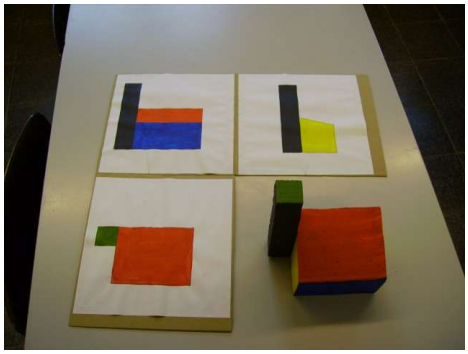
„Unsere Lebenswelt ist in Natur, Kunst und Technik durch geometrische Formen geprägt. Räumliches Verständnis und geometrische Begriffe sind notwendig, um die Umwelt bewusst wahrnehmen zu können. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ihr räumliches Vorstellungsvermögen im intensiven handelnden und gedanklichen Umgang mit vielfältigen geometrischen Situationen."

Beobachtungskriterien am Ende der Jahrgangsstufe 2	Regelanforderungen am Ende der Jahrgangsstufe 4
Orientierung in der Ebene und im Raum	
• Beschreibt das Kind Lagebeziehungen von Figuren und Körpern in der Ebene und im Raum (rechts–links, oben–unten, vor–hinter)? • Baut und faltet das Kind nach Handlungsanweisungen und Phasenmodellen? • Übersetzt das Kind bildliche Darstellung von Bauwerken (z. B. Würfelgebäude) beim Bauen mit Steckwürfeln und Bauklötzen in eigene Handlungen?	Die Schülerinnen und Schüler • erkennen und beschreiben Lagebeziehungen von Figuren und Körpern in der Ebene und im Raum, • orientieren sich im Lebensraum, indem sie Pläne lesen und einfache Grundrisse und Lageplänne erstellen und deuten. • setzen zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken zueinander in Beziehung (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen).

Bildungsplan FHH

Die Schattenbox: Mathematischer Hintergrund

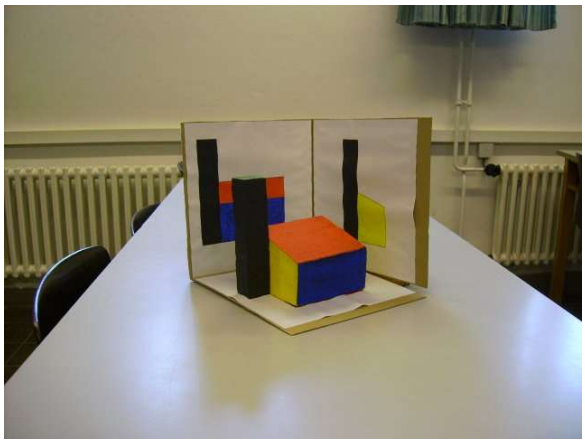
- Dreitafelprojektion



- Aufriss und Seitenriss: **orthogonale Parallelprojektion eines** räumlichen Objektes auf eine **senkrecht** stehende Zeichenebene
- Grundriss: **orthogonale Parallelprojektion eines** räumlichen Objektes auf eine **vertikal** stehende Zeichenebene

Die Schattenbox: Mathematischer Hintergrund

- Dreitafelprojektion
- …in Raumecke



Die Schattenbox: Mathematischer Hintergrund

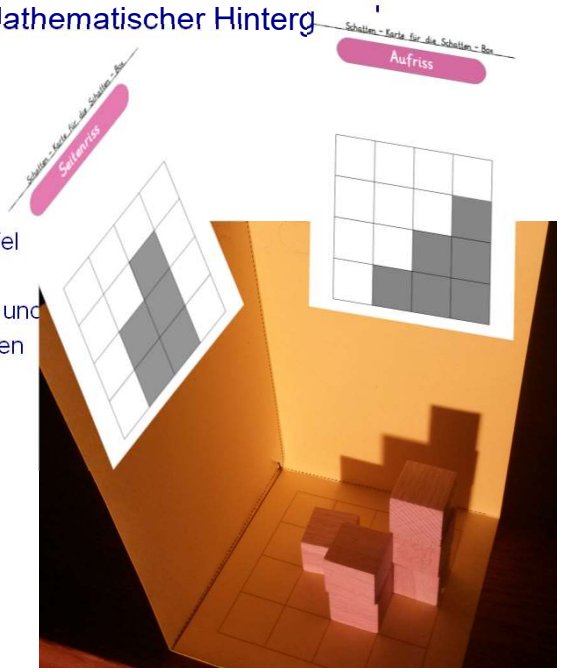
- Dreitafelprojektion
- …in Raumecke
- Normierung durch Würfel im Raster

Die Schattenbox: Mathematischer Hintergrund

- Dreitafelprojektion
- …in Raumecke
- Normierung durch Würfel im Raster
- Darstellung von Aufriss und Seitenriss durch Schatten

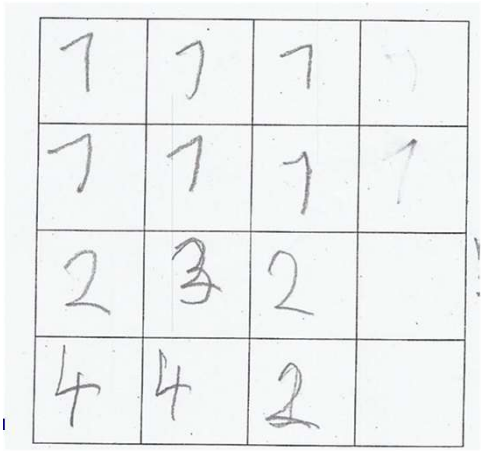
Die Schattenbox: Mathematischer Hinterg

- Dreitafelprojektion
- …in Raumecke
- Normierung durch Würfel Raster
- Darstellung von Aufriss und Seitenriss durch Schatten
- …auf Schattenkarten



Die Schattenbox: Mathematischer Hintergrund

- Dreitafelprojektion
- …in Raumecke
- Normierung durch Würfel im Raster
- Darstellung von Aufriss und Seitenriss durch Schatten
- …auf Schattenkarten
- gewichteter Grundriss als Bauplan



Arne I

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

- Mathematischer Hintergrund:
- Dreitafelprojektion
- …in Raumecke
- Normierung durch Würfel im Raster
- Darstellung von Aufriss und Seitenriss durch Schatten
- …auf Schattenkarten
- gewichteter Grundriss als Bauplan

Durch Projektion gehen Informationen verloren: Mehrdeutigkeit als Lernchance

Enthält alle relevanten Informationen für Würfelbauwerke im Raster

Arbeitsauftrag: Schatten-Box kennen lernen

- Arbeiten Sie zu zweit an einer Schattenbox
- „Aufriss“ ist frontal vor Ihnen.

1.
- Bauen Sie ein Würfelgebäude ins Raster.
- Zeichnen Sie die passenden Schatten-Karten.
- Schreiben Sie den passenden Bauplan.

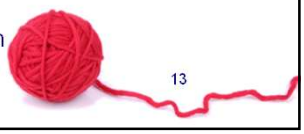
2.
- Tauschen Sie die Schatten-Karten mit einem anderen Paar.
- Bauen Sie ein passendes Gebäude zu den anderen Schattenkarten. Vergleichen Sie!

Ziele heute:
Schattenbox und unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten kennen lernen

- Roter Faden:

1. Mathematischer Hintergrund
   - Arbeitsphase: Kennen-Lernen der Schattenbox
2. Produktives Üben mit der Schattenbox
3. Schattenbox im Unterrichtsverlauf
   - Arbeitsphase: Erkundung der Einer Karten
   - Arbeitsphase: Erkundung der Kartei
4. Problemlösen mit der Schattenbox
   - Arbeitsphase: Problemlösen
   - Arbeitsphase: Vom Bauplan zur Schattenkarte
5. Schattenbox und SOMA-Teile
   - Arbeitsphase: Aufgabendesign

- Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen



Arne Pöhls 13

Foto: Tim Reckmann

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

- „Von Übung sprechen wir in der Regel, wenn ein Satz an Wissenselementen oder eine Fertigkeit anhand einer größeren Zahl gleichartiger Aufgaben geübt wird.“ (Wittmann 1992)

‚Pool‘ von Aufgaben →
‚Aufgabengenerator‘ wählt aus Pool aus →
Kinder bewältigen Auswahl →
Ziel der Geläufigkeit (Automatisierung)

- Beim produktiven Üben:
- ‚Aufgabengenerator‘: aus mathematischer Struktur/ durch Problemlösen/ durch Erstellen eines Produkts/ durch Operatoion
- Auswahl: steht im ganzheitlichem Zusammenhang
- Ziel: Geläufigkeit und Vernetzung

Arne Pöhls 14

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

Aufriss

Bauwerk

produktive, problemorientierte, oft mehrdeutige Aufgabenstellungen

Seitenriss

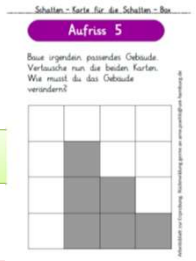
Gewichteter Grundriss

15

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

Vorgabe:

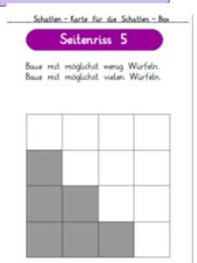
Aufriss



produktive, problemorientierte, oft mehrdeutige Aufgabenstellungen

Vorgabe:

Seitenriss



Finde ein passendes Bauwerk

Finde weitere Bauwerke! Minimale Anzahl Würfel? Maximale Anzahl Würfel?

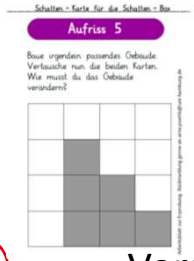
Dokumentiere als Bauplan

Arne Pöhls

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

Vorgabe:

Aufriss



produktive, problemorientierte, oft mehrdeutige Aufgabenstellungen

Vorgabe:

Seitenriss

Kontrolliere in der Schattenbox

Finde weitere Bauwerke. Minimale Anzahl Würfel? Maximale Anzahl Würfel?

Schreibe einen Bauplan

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

Zeichne die passende Schattenkarte

produktive, problemorientierte, oft mehrdeutige Aufgabenstellungen

Kontrolliere in der Schattenbox

Zeichne die passende Schattenkarte

Vorgabe:

Gewichteter Grundriss

Baulplan 2

3	2	1
1	3	2

18

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

Vorgabe:

Bauwerk
- Inner-/ außer-halb der Box
- als (isometr.) Zeichnung
- als Foto …

Zeichne die passende Schattenkarte

produktive, problemorientierte, oft mehrdeutige Aufgabenstellungen

Zeichne die passende Schattenkarte

Gewichteter Grundriss

19

Ziele heute:
Schattenbox und unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten kennen lernen

- Roter Faden:

1. Mathematischer Hintergrund
   - Arbeitsphase: Kennen-Lernen der Schattenbox
2. Produktives Üben mit der Schattenbox
3. Schattenbox im Unterrichtsverlauf
   - Arbeitsphase: Erkundung der Einer Karten
   - Arbeitsphase: Erkundung der Kartei
4. Problemlösen mit der Schattenbox
   - Arbeitsphase: Problemlösen
   - Arbeitsphase: Vom Bauplan zur Schattenkarte
5. Schattenbox und SOMA-Teile
   - Arbeitsphase: Aufgabendesign
- Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen

Arne Pöhls

20

Foto: Tim Reckmann

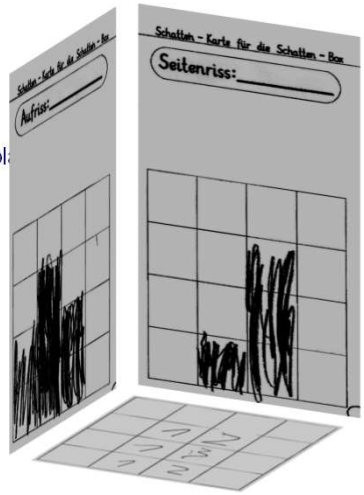
Schattenbox im Unterrichtsverlauf

- Einführung mit Taschenlampe
- Erzeugen eines „magischen Moments“

- Praktische Hinweise:
- Lampe zu Hause testen
- Lampe mit möglichst parallelen Lichtstrahlen:
  Tipp: über die Tischkante leuchten
  ➔ Kernstrahlen nutzen
- ACHTUNG 1:
  LED-Taschenlampen haben oft
  mehrere Lichtquellen ➔ mehrere Schatten
- ACHTUNG 2:
  Lampen am Mobil-Telefon streuen stark

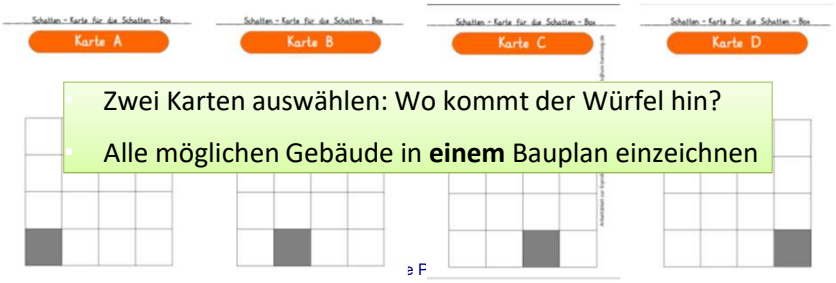
Schattenbox im Unterrichtsverlauf

- Einführung mit Taschenlampe
  - Tipp: über Tischkante
- Zuordnung von Schattenkarten und Baupl
  - Dokumentation als Schattenkarten
    und gewichtete Baupläne



Schattenbox im Unterrichtsverlauf

- Einführung mit Taschenlampe
  - Tipp: über Tischkante
- Zuordnung von Schattenkarten und Bauplan
- Einführende Aufgabe im Klassenverband: „Orange Einerkarten“

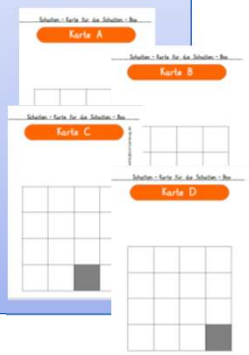


- Zwei Karten auswählen: Wo kommt der Würfel hin?
- Alle möglichen Gebäude in **einem** Bauplan einzeichnen

Arbeitsauftrag: Erkundung mit den Einer-Karten

Arbeiten Sie zu zweit an einer Schattenbox. „Aufriss“ ist frontal.

- Benutzen Sie nur die 4 orangen Schattenkarten (Einerkarten).
- Wählen Sie zwei Karten aus, die Sie als Aufriss und Seitenriss verwenden.
- Platzieren Sie passend einen Würfel.
- Dokumentieren Sie in einem Bauplan.
- Wiederholen Sie. Dokumentieren Sie immer in dem **selben** Bauplan.
- Welche Felder erreichen Sie? Welche nicht?

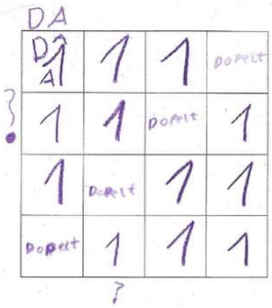


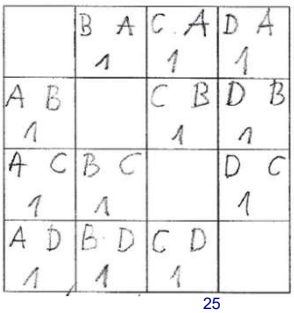
Arne Pöhls

Schattenbox zum produktiven Üben in Raum und Form

Zwei Karten Auswählen
Welche/s Bauwerk/e sind darstellbar?
All möglichen Gebäude in einem Bauplan einzeichnen

Dokumente aus der Erprobung:





Schattenbox im Unterrichtsverlauf

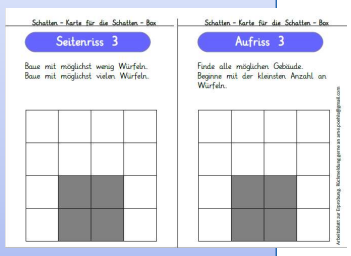
- Einführung mit Taschenlampe
  - Tipp: über Tischkante
- Zuordnung von Schattenkarten und Bauplan
- Einführende Aufgabe im Klassenverband: „Orange Einerkarten“
- Kartei „Schattenbox“ und Differenzierung:
- erst Bauen, dann Bauplan zeichnen
  - erst Bauplan zeichnen, dann kontrollieren
- Fragestellungen „Aufriss“
  - Fragestellungen „Seitenriss“
  - Begründungen und Argumentationen einfordern
  - (fach-)sprachliche Korrektheit
- Ausgewählte Karteikarten im Klassenverband ➔ diskursive Aufgaben

Arbeitsauftrag:
Kartei-Karten im Klassenverband

Arbeiten Sie zu zweit an einer Schattenbox. „Aufriss“ ist frontal.

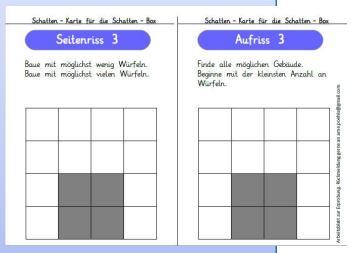
- Bearbeiten Sie das Set 3 möglichst vollständig.
  - Welche differenzierenden Hilfestellungen bieten sich an?
- Bearbeiten Sie Set 4, indem Sie variieren und reflektieren
  - erst Gebäude bauen, dann Bauplan zeichnen

  oder
  - erst Bauplan zeichnen, dann Bauen



Arbeitsauftrag:
Kartei-Karten im Klassenverband

- Strukturierungshilfe und „Schwarmintelligenz“
  1. Alle mit 3 Würfel …
  2. Alle mit 4 Würfeln …
  3. Alle mit 5 Würfeln …
- Kooperieren Sie mit einem andern Team. Kontrollieren Sie arbeitsteilig.



Arbeitsauftrag:
Kartei-Karten im Klassenv

- Sortierte Lösungen zu Set 3

Alle Baupläne zu Kartensatz 3 mit 4 Würfeln:

		2	
	2		

	2		
		2	

Alle Baupläne zu Kartensatz 3 mit 5 Würfeln

	1	2	
	2		

		2	
	2	1	

	2		
	1	2	

	2	1	
		2	

Arne Pöhls 29

Alle Baupläne zu Kartensatz 3 mit 6 Würfeln:

	1	2	
	2	1	

	2	2	
	2		

		2	
	2	2	

	2	1	
	1	2	

	2	2	
		2	

	2		
	2	2	

Alle Baupläne zu Kartensatz 3 mit 7 Würfeln:

	2	2	
	2	1	

	1	2	
	2	2	

	2	1	
	2	2	

	2	2	
	1	2	

Alle Baupläne zu Kartensatz 3 mit 8 Würfeln:

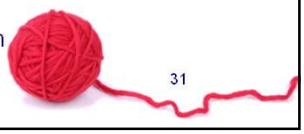
	2	2	
	2	2	

Arne Pöhls 30

Ziele heute:
Schattenbox und unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten kennen lernen

- Roter Faden:

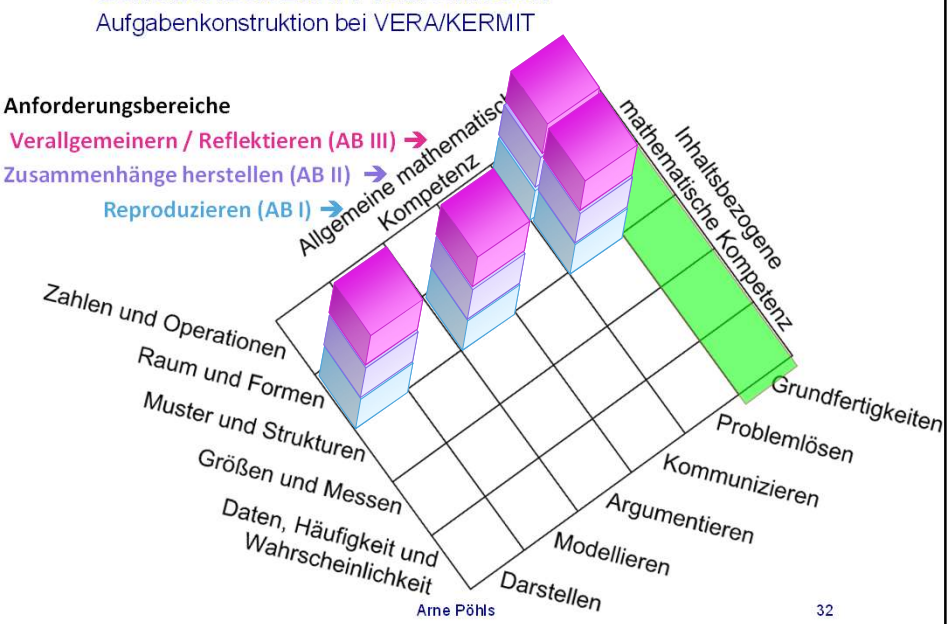
1. Mathematischer Hintergrund
   - Arbeitsphase: Kennen-Lernen der Schattenbox
2. Produktives Üben mit der Schattenbox
3. Schattenbox im Unterrichtsverlauf
   - Arbeitsphase: Erkundung der Einer Karten
   - Arbeitsphase: Erkundung der Kartei
4. Problemlösen mit der Schattenbox
   - Arbeitsphase: Problemlösen
   - Arbeitsphase: Vom Bauplan zur Schattenkarte
5. Schattenbox und SOMA-Teile
   - Arbeitsphase: Aufgabendesign
- Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen



Arne Pöhls 31

Foto: Tim Reckmann

Schattenbox zum Problemlösen
Aufgabenkonstruktion bei VERA/KERMIT



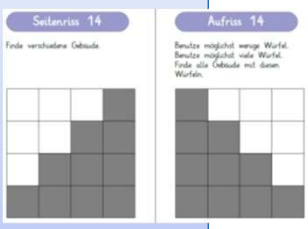
Arne Pöhls 32

Schattenbox zum Problemlösen: Masterarbeit von Winnie Diers, 2016

Heurismen	Kind 1	Kind 2	Kind 3	Kind 4	Zsfssng.
Systematisches Probieren	Mehrfach einige Würfel/Türme um ein Feld verschieben, bis es passt bei KP 1, 15; Probiert, zwei Würfel zu entfernen bei KP 3	Versucht, systematisch auszuschließen, wo kein Würfel liegen kann bei KP 1, Probiert systematisch, wo noch die Würfel liegen könnten bei KP 4	Lässt das freie Feld systematisch im Kreis wandern bei KP 1; Notiert sehr systematisch verändernd verschiedene Gebäude, die sich jeweils in einem Aspekt unterscheiden bei KP 2+1	Notiert systematisch alle Möglichkeiten (auch gespiegelte) mit einer Würfelzahl bei KP 3	Würfel verschieben, Ausschlussverfahren, alle Möglichkeiten systematisch durchgehen
Vorwärts- oder Rückwärts-arbeiten	Vorwärts: notiert ein Feld nach dem anderen, immer mit Überlegen und Kontrolle bei KP 13 Rückwärts: Aufgabenstellung, die auf die Arbeit mit den Karteikarten folgte, nämlich zuerst die Schattenkarten malen, dann das Gebäude bauen	Vorwärts: notiert ein Feld nach dem anderen, immer mit Überlegen und Kontrolle bei KP 14 Rückwärts: Aufgabenstellung, die auf die Arbeit mit den Karteikarten folgte, nämlich zuerst die Schattenkarten malen, dann das Gebäude bauen	Rückwärts: Aufgabenstellung, die auf die Arbeit mit den Karteikarten folgte, nämlich zuerst die Schattenkarten malen, dann das Gebäude bauen	Baut einen Turm nach dem anderen bei KP 9 Rückwärts: Aufgabenstellung, die auf die Arbeit mit den Karteikarten folgte, nämlich zuerst die Schattenkarten malen, dann das Gebäude bauen	Ein Feld nach dem anderen, Erst Schattenkarten erstellen
Analogieschlüsse und Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes	Versuchte Analogie – Diagonale bei KP 15	Direkt die Diagonale bauen, nachdem sie es entdeckt hat bei KP 3, 5		Direkt Diagonale bauen bei KP 11, Versuchte Analogie – Diagonale bei KP 15	Diagonale, Zerlegungssrategie
Zerlegen, Ergänzen und Fallunterschei-dung	Erst untere Ebene bauen, dann die 2. und 3. bei KP 6, 10; Zuerst Aufriss bauen, dann den Seitenriss bei KP 2, 5, 11	Zuerst Aufriss bauen, dann den Seitenriss bei KP 2, 10, 11, 15, 16 (versucht)	Erst die Zahlen für den Seitenriss notieren, dann die für den Aufriss, dann Mitte auffüllen bei KP 5	Fallunterscheidung: Fragt am Anfang, welche Gebäude verschieden sind	Ebenen trennen, Seiten- und Aufriss trennen Auch: Zerlegung in Teilprobleme durch festhalten von Würfelanzahlen. [Erst alle mit 4 Würfeln, dann …]
Invarianzprinzip	(Vermutete) minimale Würfelzahl als Invariant bei KP 2, 8	Zuerst den höchsten Turm bauen bei KP 10, Zuerst die Diagonale als Fixpunkt bei KP 3, 5	Zuerst die hohen Türme, dann Rest ergänzen bei KP 15	Zuerst den höchsten Turm bauen bei KP 10, 15; Min. als Invariant und dann ergänzen bei KP 14, 15	Minimale Würfelzahl oder Höchste Türme als Invariant
Symmetrieprinzip	Verschiebt das Gebäude im ganzen nach dem Kartentauschen bei KP 5			Evl. spiegeln bei KP 3	Gebäude verschieben, spiegeln

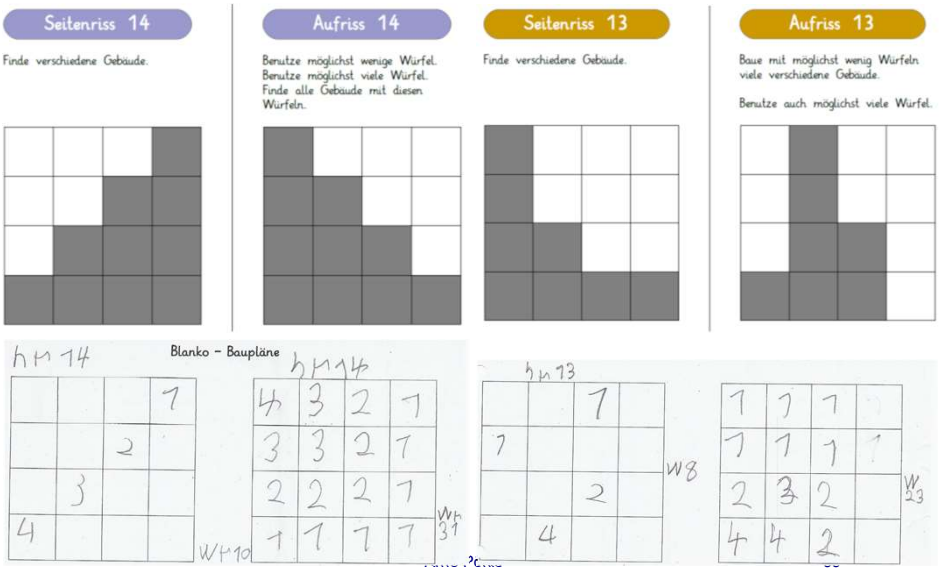
Arbeitsauftrag: Problemlösen

Arbeiten Sie zu zweit an einer Schattenbox. „Aufriss“ ist frontal.

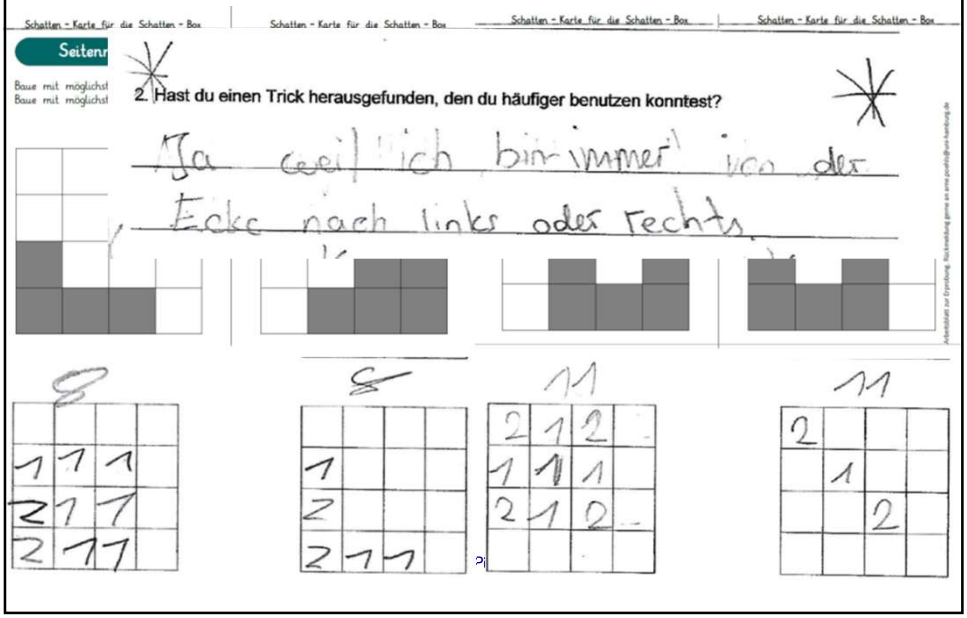


- Bearbeiten Sie Kartensatz 14 (danach 13) möglichst vollständig
- Vollziehen Sie nach, inwiefern Sie die aufgelisteten Heurismen einsetzen können.
- Diskutieren Sie die Bedeutung dieser Heurismen für Ihren Unterricht.
- Warum ist die Fragestellung hier eine andere als bei Set 3?

Arbeitsauftrag:
Problemlösen - Schülerlösungen



Arbeitsauftrag:
Problemlösen - Entwicklung einer Schülerin: Diagonalstruktur

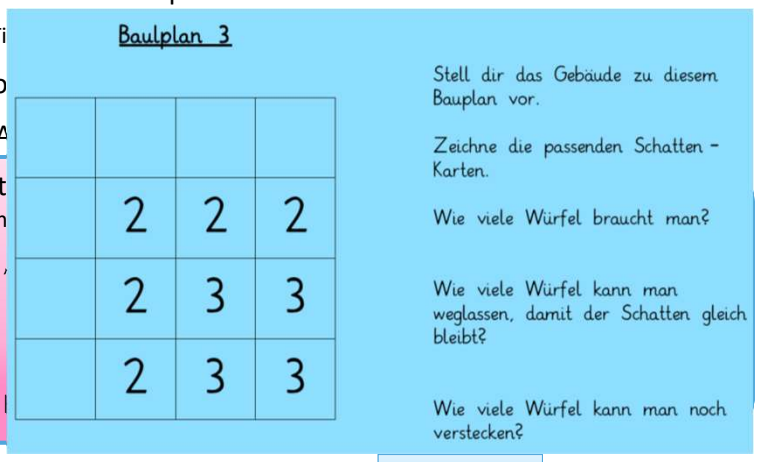


Arbeitsauftrag:
Problemlösen - Video

- VIDEO

Vom Bauplan zur Schattenkarte

- Einführung mit Taschenlampe
  - Tipp: über Ti
- Zuordnung vo
- Einführende A
- Kartei „Schatt
- erst Bauen, dann
- Fragestellungen ,
- Ausgewählte



- vom Bauplan zur Schattenkarte

erst Bauen, dann Schattenkarte ODER erst Schattenkarte zeichnen, dann kontrollieren

Arbeitsauftrag:
Vom Bauplan zur Schattenkarte

Arbeiten Sie zu zweit an einer Schattenbox. „Aufriss“ ist frontal.

- Erkunden Sie das AB
- erst Bauen außerhalb der Box, dann Schattenkarte zeichnen
  ODER
- erst Schattenkarte zeichnen, dann kontrollieren durch Bauen in der Box

Ziele heute:
Schattenbox und unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten kennen lernen

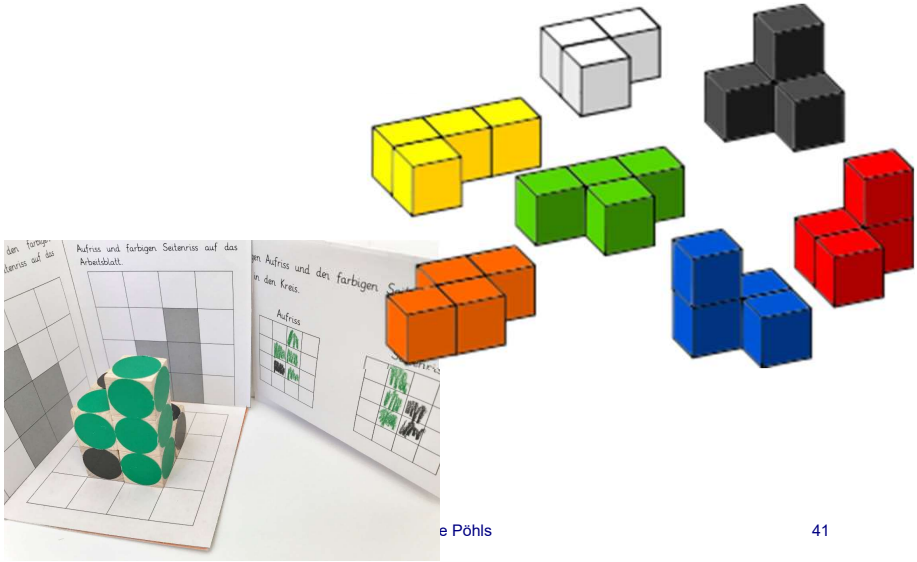
- Roter Faden:

1. Mathematischer Hintergrund
   - Arbeitsphase: Kennen-Lernen der Schattenbox
2. Produktives Üben mit der Schattenbox
3. Schattenbox im Unterrichtsverlauf
   - Arbeitsphase: Erkundung der Einer Karten
   - Arbeitsphase: Erkundung der Kartei
4. Problemlösen mit der Schattenbox
   - Arbeitsphase: Problemlösen
   - Arbeitsphase: Vom Bauplan zur Schattenkarte
5. Schattenbox und SOMA-Teile
   - Arbeitsphase: Aufgabendesign

- Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen

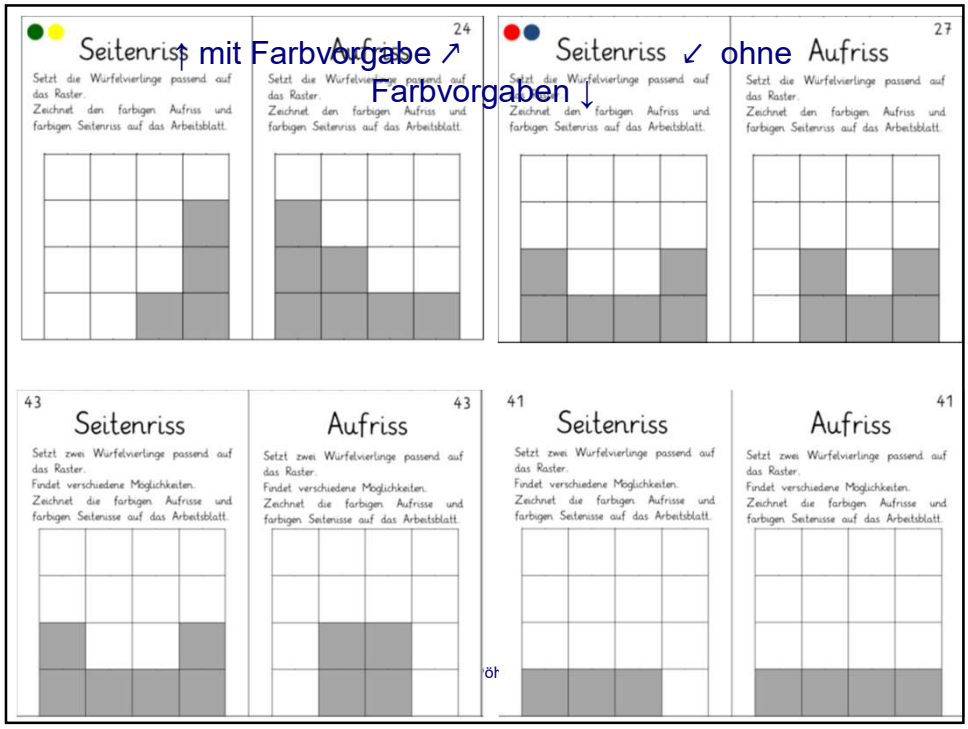
Foto: Tim Reckmann

Ausblick und Erweiterung zur Schattenbox: SOMA-Teile in der Schattenbox (Willms 2017)



Arbeitsauftrag: Aufgaben-Design - SOMA-Teile in der Schattenbox

- Einwickeln Sie selbst interessante Schattenkarten, die SuS mit SOMA-Teilen bearbeiten sollen.
- Entwickeln Sie dabei (mindestens) 2 unterschiedliche Fragestellungen.
- Beschränken Sie sich (zunächst) auf Karten mit 2 SOMA-Teilen.
- Tipps zum Aufgabendesign:
  - Eindeutigkeit vs. Mehrdeutigkeit
  - Vorgabe der benutzten Teile oder Verschweigen
  - Zulassen von Hohräumen?
- Erkunden Sie danach einige der Kartei-Karten

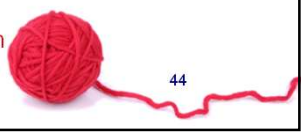


Ziele heute:

Schattenbox und unterrichtliche Umsetzungsmöglichkeiten kennen lernen

- Roter Faden:

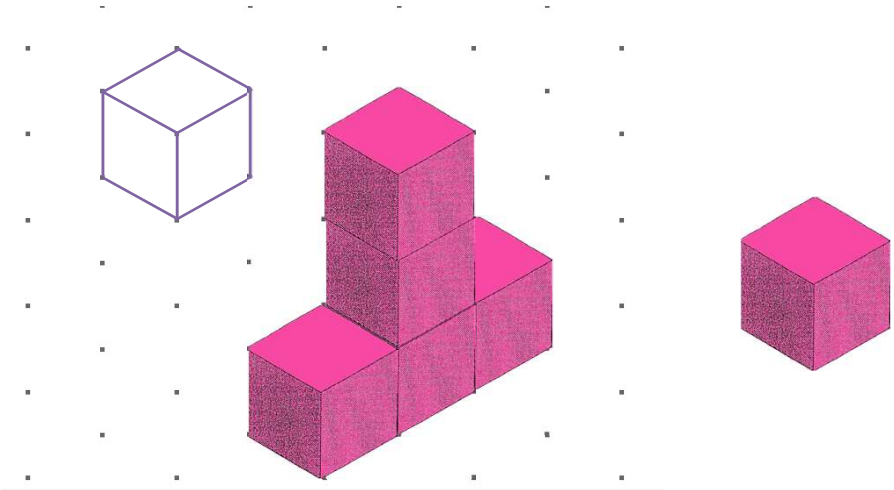
1. Mathematischer Hintergrund
   - Arbeitsphase: Kennen-Lernen der Schattenbox
2. Produktives Üben mit der Schattenbox
3. Schattenbox im Unterrichtsverlauf
   - Arbeitsphase: Erkundung der Einer Karten
   - Arbeitsphase: Erkundung der Kartei
4. Problemlösen mit der Schattenbox
   - Arbeitsphase: Problemlösen
   - Arbeitsphase: Vom Bauplan zur Schattenkarte
5. Schattenbox und SOMA-Teile
   - Arbeitsphase: Aufgabendesign
- Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen



Arne Pöhls 44

Foto: Tim Reckmann

Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen: Isometrisches Papier - Würfelplättchen



Ausblick: Kombination mit weiteren Darstellungen: Klötzchen-App

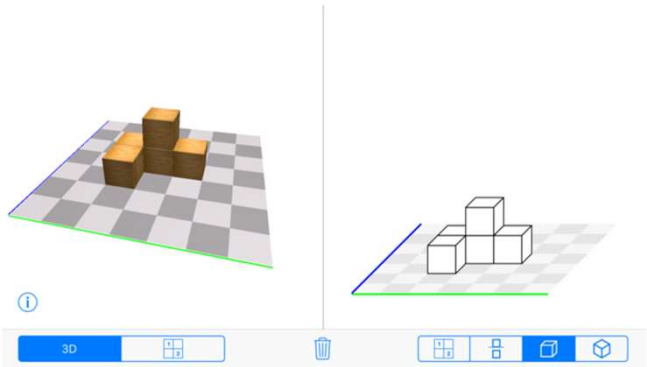


Bild: https://itunes.apple.com/de/app/kl%C3%B6tzchen/id1027746349?mt=8

Literatur

- Pöhls, Arne (2015): Bauen in der Schattenbox – Welches Würfelgebäude wirft welchen Schatten?. Grundschule Mathematik, Heft 45, S.22-25
- Pöhls-Stöwesand, Arne (2018): Welcher Schatten gehört zum Grundriss? - Den Schatten (Aufriss) zum Grundriss von Würfelbauten vorhersagen. Grundschule Mathematik, H 58, S.14-15
- Willms, Maike (2017): Was sagt uns der Schatten? - Würfelvierlinge in der Schattenbox positionieren. Grundschule Mathematik, Heft 55, S.20-21

- Material-Download: http://arnepöhls.de

- Fragen?
- Anregungen?

- Feed-back